

Etude des engrenages de microtechnique

THÈSE N° 6890 (2016)

PRÉSENTÉE LE 18 MAI 2016

À LA FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

LABORATOIRE D'ACTIONNEURS INTÉGRÉS

PROGRAMME DOCTORAL EN ROBOTIQUE, CONTRÔLE ET SYSTÈMES INTELLIGENTS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Quentin THEURILLAT-BONJOUR

acceptée sur proposition du jury:

Prof. H. Bleuler, président du jury

Prof. Y. Perriard, Prof. Hon. J. Giovanola, directeurs de thèse

Dr R. Behrend, rapporteur

Dr A. Wacinski, rapporteur

Prof. J. Schiffman, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2016

Remerciements

L'auteur tient à remercier Mlle L.Perruchoud et M. L.Perroud pour leur aide dans l'amélioration de l'outil d'analyse, MM. Y.Buntschu et A.Motamed pour la finalisation de la conception et le suivi en construction du banc d'essai, MM. A.Aymon, Y.Heimberg, P.Hornick et Y.Rambeau-Bysath pour leurs travaux de semestre qui ont permis la conception générale du banc d'essai et la conception de capteurs de couple dédiés, Dr. R.Grigorescu qui a suivi les travaux des étudiants lors de la conception du banc d'essai, M. M.Jeanneret qui a usé de toute son expérience, ses connaissances et son habileté pour nous aider à réaliser le banc d'essai, le Dr. D.Kremer qui a suivi l'ensemble du travail, M. L.Jenni pour ses travaux de stages et ses idées, Mme P.Bendel pour son soutien administratif et moral, M. K.Agbeviade pour son aide dans tous les domaines techniques, administratifs, et pour les nombreuses heures de philosophie de la vie quotidienne, l'entreprise partenaire et son représentant M. C.Fleury pour leur patience, le Pr. Perriard pour avoir accepté d'intégrer un sans-labo à son équipe, et bien évidemment le Pr. J.Giovanola qui a eu le courage de proposer ce travail et de suivre son auteur jusqu'au bout malgré les kilomètres, le décalage horaire, les heures de doute, les difficultés numériques, et le pessimisme sans bornes de son auteur.

Sur un autre plan ce travail n'aurait pas non-plus vu le jour sans les gens du LCSM qui ont supporté mes soupirs et mes plaintes, avec dans le désordre : E.Deghilage, T.Jodlowski, M.Hodebourg, P-M.Pochon, Y.Berthier, G.Dormond, A.Schorderet, A.Berset, J.Gasparoux, M.Benoit, C.Ramseyer, C.Chabanel et Y.Ognanovic, le LAI qui a accueilli la fin de mes déboires, mes PCs qui ont supporté très placidement mes cris et accès de colère et bien évidemment ma famille et surtout mon épouse qui a supporté les heures tardives, les doutes, les colères, et qui m'a patiemment accompagné et soutenu.

Lausanne, le 04.02.2016

Abstract

The research presented in this thesis addresses the design of gear drives for micro engineering applications and was performed in collaboration with a watch manufacturer.

Gears have long been found in many mechanical engineering applications. Their use in watches satisfies specific constraints: small dimensions, little or no lubrication and unusual performance specifications.

A literature review allows us to establish a catalogue of existing gear profiles and to summarize methods for the analysis and the generation of gear profiles of profile analysis and generation methods. On the basis of this assessment, we define knowledge gaps which we propose to bridge in the present work by reaching the following objectives:

1. Characterize the behavior of existing gear profiles used in the watchmaking industry (nominal profiles, but also profiles affected by shape errors and axes misalignment errors); determine their kinematic and static performances, and their transmission efficiency. Use these results to compare various profiles on an objective and rigorous basis.
2. Formulate the equations necessary to calculate gear profiles using conjugate conditions differing from the traditional kinematic conditions (i.e. imposing the transmission ratio)
3. Work out a design methodology for gear profiles relying on the results obtained while working on the first two objectives

To reach those objectives, we develop a computer code to evaluate the performances of the profiles. The diversity of existing profiles led us to formulate a generic geometrical representation applicable to all profiles, while allowing us to use the same analysis code. The developed tool is then validated by simulating profiles, the behavior of which is known analytically.

To calculate conjugate tooth profiles respecting a static criterion, we expand the classical theory by adding a new equation to it, which we derive from a balance of power. We present this equation for the three dimensional case, and the planar case. The resolution method for this equation, valid for statically conjugated cams (i.e. a single pair of teeth), must satisfy a supplementary condition that ensures that the imposed torque ratio leads to an average kinematic ratio compatible with the desired number of teeth. A numerical method was developed for the case of planar gears case that establishes the range of torque ratios satisfying the imposed average transmission ratio. The lower and upper bounds of the range of solutions are defined in terms of geometric and efficiency considerations, respectively. The proposed approach is illustrated and validated by some computations of statically conjugated profiles.

In parallel to those theoretical developments, we designed and built a test bench to characterize experimentally the performances of gear profiles, (altered or not by various shape or misalignment errors) under operating conditions similar to those prevailing in a watch.

The last part of the thesis provides a critical discussion of these developments, places them in a broader context and comments on how they could be generalized in future research works.

Keywords: Gears, watchmaking, non-conventional profiles, gear generation methods, analytical geometry, envelope theory, numerical simulations, performance optimization

Résumé

La recherche présentée dans cette thèse a pour objet la conception des trains d'engrenages en microtechnique et a été réalisée en collaboration avec une entreprise horlogère.

Les engrenages sont utilisés depuis longtemps dans bien des domaines de la mécanique. Leur application en horlogerie doit répondre à des conditions particulières : dimensions restreintes, peu ou pas de lubrification, performances requises inhabituelles.

Une revue de la littérature permet d'établir un catalogue des profils de denture existants et une synthèse des méthodes d'analyse et de génération des profils. Forts de ce bilan, on constate certaines lacunes de connaissances, qu'on se propose de combler par un travail de recherche dont les objectifs sont:

1. Caractériser le comportement des profils de denture existants utilisés en horlogerie (profils nominaux, mais aussi entachés d'erreur de forme et d'erreurs d'entraxe et d'alignement des axes), déterminer les performances cinématiques, statiques et énergétiques. Utiliser ces résultats pour comparer les divers profils entre eux sur une base objective et rigoureuse.
2. Formuler les équations nécessaires pour le calcul de profils conjugués à partir de conditions de conjugaison différentes des conditions cinématiques (c'est-à-dire l'imposition du rapport de transmission) traditionnelles
3. Mettre au point une méthode de conception de profils d'engrenages s'appuyant sur les résultats acquis en travaillant aux deux premiers objectifs.

Pour atteindre ces objectifs, on développe un outil informatique permettant l'évaluation des performances des profils. Leur grande variété nous a amené à formuler une représentation géométrique générique s'appliquant à tous les profils, tout en utilisant le même code d'analyse. L'outil développé est ensuite contrôlé en simulant des profils dont le comportement possède une solution analytique connue.

Afin de permettre le calcul de profils conjugués selon un critère statique, on reprend la théorie classique, à laquelle on ajoute une équation supplémentaire formulée à partir d'un bilan de puissance. On présente l'équation pour le cas tridimensionnel et le cas plan. La méthode de résolution de cette équation, valable pour des cames conjuguées en couple (une seule paire de dents), doit tenir compte d'une condition supplémentaire garantissant que le rapport de couple imposé conduira à un rapport de transmission moyen compatible avec le nombre de dents prévu. Une méthode numérique a donc été développée pour le cas d'engrenages plans, qui détermine le domaine de valeurs du rapport de couple satisfaisant la condition de rapport de transmission moyen. Les bornes inférieures et supérieures du domaine de solutions sont définies respectivement en termes de géométrie de la dent et de rendement énergétique. L'approche proposée est illustrée et validée par le calcul de quelques profils.

En parallèle à ces travaux théoriques, un banc d'essai a été conçu et construit, qui permet de caractériser expérimentalement les performances de profils d'engrenage, (entachés ou non de diverses erreurs de forme ou de positionnement) dans des conditions de fonctionnement représentatives de celles de l'horlogerie.

La dernière partie de la thèse présente une discussion critique de ces développements, les replace dans un contexte plus large et commente leur généralisation éventuelle dans des travaux de recherche futurs.

Mots-clés : Engrenages, horlogerie, profils non conventionnels, méthode de génération d'engrenages, géométrie analytique, théorie des enveloppes, simulation numérique, optimisation des performances

Contenu

Abstract	v
Résumé.....	vii
Table des figures	xv
Liste des tableaux.....	xix
Table des équations	xxi
Introduction.....	1
Nomenclature et conventions.....	3
Chapitre 1 Etat de l'art.....	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Définition et fonction d'un engrenage.....	5
1.3 Configurations standards d'engrenage	6
1.3.1 Engrenage plan	6
1.3.2 Engrenage à axes concourants	7
1.3.3 Engrenage gauche	8
1.4 Profils standards.....	10
1.4.1 Terminologie.....	10
1.4.2 Le profil à développante de cercle	11
1.4.3 Le profil cycloïdal	15
1.4.4 Le profil Wildhaber-Novikov	17
1.5 Profils non-conventionnels.....	17
1.5.1 Le profil LogiX [10, 11].....	17
1.5.2 Le profil cosinus [13].....	21
1.6 Théorie des engrenages.....	23
1.6.1 Profil conjugué : Définition	23
1.6.2 Génération graphique des profils.....	23
1.6.3 Génération des profils conjugués cinématiquement par la géométrie différentielle	25
1.6.4 Génération par segments de développante [18]	33
1.6.5 Contact géométrique : formulation.....	34

1.7	Particularités des trains d'engrenages de l'horlogerie.....	35
1.7.1	Généralités	35
1.7.2	Profils utilisés en horlogerie	37
1.7.3	Différences entre l'utilisation horlogère et l'utilisation « classique » des engrenages.....	40
1.8	Erreurs affectant les engrenages d'horlogerie	41
1.8.1	Erreurs d'assemblage	41
1.8.2	Erreurs de forme.....	42
1.9	Modélisation des erreurs	42
1.9.1	Erreurs d'assemblage.....	42
1.9.2	Erreurs de forme.....	42
1.10	Contact mécanique.....	43
1.11	Tribologie.....	44
1.11.1	Environnement électrochimique et atmosphère	44
1.11.2	Couple de matériaux.....	44
1.11.3	Type de mouvement.....	45
1.11.4	Vitesses des mouvements.....	45
1.11.5	Rendement.....	45
1.11.6	Conclusions intermédiaires.....	45
1.12	Conclusion.....	46
1.12.1	Synthèse et conclusions	46
1.12.2	Postulat de la thèse	46
1.12.3	Objectifs spécifiques de la thèse	47
1.12.4	Approche de recherche	47
Chapitre 2	Analyse des profils.....	49
2.1	Introduction.....	49
2.2	Méthode de représentation des profils.....	49
2.2.1	Idée générale.....	49
2.2.2	Paramétrisation des profils plans.....	50
2.2.3	Extension aux autres flancs et dents	51
2.2.4	Description 3D générique des flancs pour les profils plans.....	52
2.2.5	Normale aux profils.....	55
2.2.6	Simulation des erreurs de forme (fonction f_{err}).....	56
2.3	Analyse Cinématique.....	56
2.3.1	Description du problème.....	56
2.3.2	Equations de contact [6, 29, 31]	58

2.3.3	Déroulement de l'analyse	60
2.3.4	Analyse des résultats.....	60
2.3.5	Analyse de transmission de couple et énergétique.....	63
2.4	Conclusion.....	65
Chapitre 3	Code d'analyse des profils	67
3.1	Introduction.....	67
3.2	Structure générale	67
3.3	Représentation et fonctions des profils	68
3.3.1	Concepts de base concernant la programmation orientée objet.....	69
3.3.2	Class PROFIL.....	69
3.4	Fonctions erreurs.....	72
3.5	Structure de l'analyse	74
3.5.1	Algorithme de résolution	74
3.5.2	Choix du point de départ de l'algorithme de résolution (contribution de M.Perruchoud [40]).....	76
3.6	Validation.....	76
3.6.1	Validation du comportement cinématique	76
3.6.2	Validation du comportement du rapport de couple.....	78
3.7	Conclusion.....	79
Chapitre 4	Génération des profils.....	81
4.1	Introduction.....	81
4.2	Profils conjugués cinématiques	81
4.2.1	Définition du problème.....	81
4.2.2	Théorie classique	82
4.2.3	Limitations de la théorie classique	86
4.3	Profils conjugués en couple	86
4.3.1	Equations générales.....	86
4.3.2	Spécialisation au cas des engrenages plans à axes parallèles	88
4.3.3	Discussion des équations obtenues	93
4.3.4	Note sur la résolution.....	94
4.4	Conclusion.....	94
Chapitre 5	Résolution des équations de conjugaison	95
5.1	Introduction.....	95
5.2	Remarques générales sur la conception des systèmes mécaniques.....	95
5.3	Recherche du rapport de couple j	96
5.4	Limites géométriques et énergétiques de validité	98
5.4.1	Rappel : grandeurs principales	98

5.4.2	Limites énergétiques.....	98
5.4.3	Limites géométriques.....	100
5.4.4	Remarque concernant les limites globales et les limites locales.....	103
5.4.5	Elargissement du domaine de validité	103
5.4.6	Méthode numérique de calcul des limites restreintes	104
5.4.7	Remarques concernant la recherche du profil	105
5.5	Structure du code de résolution	106
5.5.1	Entrées	106
5.5.2	Sorties	106
5.5.3	Paramètres.....	106
5.5.4	Détail du fonctionnement de l'outil informatique.....	107
5.6	Validation du code	115
5.6.1	Cas du profil d'entrée en développante avec frottement.....	115
5.6.2	Cas du profil à couple constant ETA.....	116
5.7	Conclusion.....	118
Chapitre 6	Applications	119
6.1	Introduction.....	119
6.2	Analyses de profils.....	119
6.2.1	Profils et dispositions analysées.....	119
6.2.2	Résultats	120
6.2.3	Discussion des résultats	130
6.3	Profils conjugués	131
6.3.1	Profils testés	131
6.3.2	NIHS 2025.....	131
6.3.3	Développante	133
6.3.4	Cosine	135
6.4	Conclusion.....	135
Chapitre 7	Banc d'essai.....	137
7.1	Introduction.....	137
7.2	Définition fonctionnelle et cahier des charges fonctionnel.....	137
7.2.1	Description de la fonction principale	138
7.2.2	Cahier des charges fonctionnel	138
7.3	Description du banc	140
7.4	Essais de validation [53]	143
7.4.1	Caractérisation simple des couples parasites.....	143

7.4.2	Conditions expérimentales pour la mise en train du banc d'essai et la validation de son comportement.....	144
7.4.3	Conclusions tirées des essais de validation.....	145
7.4.4	Exemple de résultats d'essais typiques	146
7.5	Conclusion.....	149
Chapitre 8	Discussion et perspectives.....	151
8.1	Discussion	151
8.1.1	Résumé du travail.....	151
8.1.2	Contributions du travail de thèse	152
8.1.3	Directives de conception.....	152
8.1.4	Critique	153
8.2	Perspectives	153
8.2.1	Code.....	153
8.2.2	Profils d'entrée.....	156
8.2.3	Optimisation.....	156
8.2.4	Evolution envisageable de la technique de calcul du conjugué cinématique/en couple.....	157
8.2.5	Généralisation des méthodes développées	158
	Conclusion	159
	Bibliographie.....	161
	ANNEXES	163
A.	Preuve du théorème de Camus [3]	165
B.	Exemple d'application de la théorie des profils conjugués: la cycloïde	171
C.	Exemple de codes Matlab	175
D.	Taillage numérique	187
E.	Profil reconstruit par spline [55].....	189
	Curriculum Vitae	161

Table des figures

Figure 1.1: Engrenage plan: disposition des axes	6
Figure 1.2: Roues d'engrenage plan; (1) denture droite; (2) hélicoïdale; (3) double hélice (source : [5])	7
Figure 1.3: Engrenage à axes concourants : disposition des axes	7
Figure 1.4: Engrenages à axes concourants; (1) Conique; (2) Spiral (source : [5]).....	7
Figure 1.5: Engrenage gauche, disposition des axes.....	8
Figure 1.6: Engrenages gauches : hélicoïdal et vis sans fin (source [6]).....	8
Figure 1.7: Types d'engrenages (classification anglo-saxonne[7]).....	9
Figure 1.8: Nomenclature des cercles	10
Figure 1.9: Exemple de développante de cercle	12
Figure 1.10: Illustration du lien entre la développante, le cercle de base (r_b), l'angle de pression (α) et le cercle primitif(r_p)	12
Figure 1.11: Développante: cercles de base, cercles primitifs et ligne d'engrènement	14
Figure 1.12: Exemple épi-, hypocycloïde	16
Figure 1.13: Ligne d'engrènement d'un profil cycloïdal	16
Figure 1.14: Engrenage Wildhaber-Novikov (source : [8])	17
Figure 1.15: Forme de la crémaillère du profil LogiX (source : [12]).....	18
Figure 1.16: Principe de construction du profil LogiX : principe de base (tiré de [12]).....	19
Figure 1.17: Principe de construction du profil LogiX : Technique de raccordement (tiré de [12])	19
Figure 1.18: Comparaison entre le profil à développante et le profil cosinus (source : [13])	21
Figure 1.19: Formation du profil cosinus (source [13]).....	22
Figure 1.20: Illustration de la méthode des roulettes, génération du profil conjugué de la roue 1	24
Figure 1.21: Illustration de la méthode des roulettes, génération du profil conjugué de la roue 2	24
Figure 1.22: Méthode des roulettes 3D (source : [5])	25
Figure 1.23: Nomenclature pour la dérivation de l'équation d'Euler-Savary (tiré de[7])	29
Figure 1.24 : Illustration du théorème de Lewis	32
Figure 1.25: Illustration des repères utilisés pour la formulation du contact géométrique	34
Figure 1.26: Schéma fonctionnel et flux entre les mécanismes d'une montre mécanique	36
Figure 1.27: Eclaté d'un mouvement mécanique (Source : [23]).....	36
Figure 1.28: Rouage de mouvement (source :[23]).....	37
Figure 1.29: Profils de pignon normalisés (1950), dimensions arbitraires et uniquement illustratives	38

Figure 1.30: Illustration du profil à couple constant (pour $\mu = 0.2$; $z_1 = 82$; $z_2 = 12$; $\alpha = 30.5^\circ$; $\eta = 0.966$) (tiré de [26])	40
Figure 1.31: Erreurs d'usinage: courbure changeant de signe (source : [28])	43
Figure 2.1: Illustration du choix des abscisses curvilignes sur un profil NIHS	50
Figure 2.2: Représentation des abscisses curvilignes des deux flancs.....	52
Figure 2.3: Forme normée du flanc de dent avec abscisse curviligne et normales (représentée dans le plan xz)	53
Figure 2.4: Mise en place du flanc sur le profil.....	53
Figure 2.5 : Illustration de la normale au profil	55
Figure 2.6 : Illustration des repères et des matrices de passage	57
Figure 2.7 : Disposition des repères	58
Figure 2.8: Définition des paires de dents et de la zone de "contact potentiel"	61
Figure 2.9: Calcul du couple transmis.....	63
Figure 3.1: Schéma général de l'analyse.....	68
Figure 3.2: Schéma de fonctionnement de la <i>class</i> Profil	70
Figure 3.3: Organigramme détaillé de l'outil d'analyse cinématique	75
Figure 3.4: Résultats d'analyse d'un profil à développante (20° , 80-40)	77
Figure 3.5: Résultats d'analyse du profil ETA (80-40, 25° , $\eta = 0.97$, $\mu = 0.2$).....	78
Figure 4.1: Disposition des 3 repères utilisés pour l'analyse de conjugaison.....	82
Figure 4.2: Disposition des repères dans le cas des engrenages plans.....	83
Figure 4.3: Schéma vectoriel pour la dérivation de la vitesse relative (les vecteurs ω_1 et ω_2 sont perpendiculaires au plan formé par les vecteurs ρ , \mathbf{E} et \mathbf{r})	85
Figure 4.4: Illustration de l'angle α	91
Figure 5.1: Illustration du calcul de ia	97
Figure 5.2: Schéma d'évaluation de j	99
Figure 5.3: Illustration des impératifs de fonctionnement géométrique globaux.....	101
Figure 5.4 : Illustration des limites à la valeur du rapport de couple.....	102
Figure 5.5: Exemple d'engrenage non-circulaire (tiré de [44]).....	103
Figure 5.6: Schéma de calcul d'un conjugué en couple	107
Figure 5.7: Illustration des barrières polynomiales.....	108
Figure 5.8: Illustration de l'intégration sur un pas.....	110
Figure 5.9: Illustration du calcul de ia	110
Figure 5.10: Illustration de la méthode de Newton. (α est la solution recherchée, les différents x correspondent aux résultats des itérations, et les droites sont les approximations linéaires de la courbe f calculées à partir de la dérivée de la fonction) (d'après [45])	112

Figure 5.11: Illustration du schéma quasi-Newton (α est la solution recherchée, les différents x correspondent aux résultats des itérations, et les droites sont les approximations linéaires de la courbe f calculées à partir des précédents x)	113
Figure 5.12: Comparaison entre le profil à développante et son équivalent conjugué en couple	115
Figure 5.13: Résultat de simulation d'un profil à développante engrené contre son conjugué en couple pour un $j= 0,494$. Les rapports de transmission et de couple sont normés.....	116
Figure 5.14: Comparaison entre le profil ETA et le résultat de conjugaison en couple	117
Figure 5.15: Mesure de l'erreur entre le profil ETA et sa reconstruction numérique.....	117
Figure 6.1: Illustration de la chaîne de tolérances (un mobile est un assemblage axe-pignon-roue)	120
Figure 6.2: Comportement du profil NIHS2025 sans aucune erreur	121
Figure 6.3: Définition des erreurs d'entraxe	122
Figure 6.4: Evolution du rapport de transmission et position de la zone d'engrènement du profil NIHS 2025 pour différents entraxes	122
Figure 6.5: Evolution du rapport de couple pour différents entraxes	123
Figure 6.6: Evolution du rendement pour différents entraxes.....	123
Figure 6.7 : Résumé du comportement du profil NIHS2025 en présence d'erreurs d'entraxe, a) variation des rapports de transmission et de couple ; b) rendement	124
Figure 6.8: Illustration des erreurs d'alignement : a) autour de l'axe x ; b) autour de l'axe y	124
Figure 6.9: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rapport de transmission	125
Figure 6.10: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rapport de couple.....	125
Figure 6.11: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rendement	126
Figure 6.12: Illustration des erreurs de forme; a) type "surépaisseur"; b) type "linéaire"	127
Figure 6.13: Illustration de l'effet des erreurs de forme sur le rapport de transmission	128
Figure 6.14: Illustration de l'effet des erreurs de forme sur le rapport de couple.....	128
Figure 6.15: Comparaison des rendements.....	129
Figure 6.16: Profil conjugué en couple calculé (entrée: NIHS 2025 98-14).....	131
Figure 6.17: Comportement simulé du profil NIHS2025 contre son conjugué en couple	132
Figure 6.18: Comparaison des rapports de transmission calculé pour la conjugaison et simulé	133
Figure 6.19: Représentation du profil conjugué en couple calculé (profil d'entrée : développante $\alpha = 20^\circ$).....	134
Figure 6.20: Comportement de l'engrènement 98-14 avec profil à développante ($\alpha = 20^\circ$) comme entrée	134
Figure 6.21: Illustration du domaine de résolution du profil cosine.....	135
Figure 7.1: Disposition des axes du banc d'essai	140

Figure 7.2: Schéma cinématique du banc d'essai (en position de renvoi d'angle)	141
Figure 7.3 :Vue partielle d'un capteur de couple avec les jauges tensométriques ([48]).....	141
Figure 7.4: Banc d'essai finalisé en position engrenage plan (cf. [53]).....	142
Figure 7.5: Evaluation du couple de frottement dans les paliers	144
Figure 7.6:Vue parallèle aux axes de la configuration pignon-roue utilisée pour les essais de validation du banc d'essai (à noter les profils différents dans les parties supérieure et inférieure de la roue).....	145
Figure 7.7: Rotation du pignon durant l'essai.....	147
Figure 7.8: Exemple de résultat d'essai: mesures de couple (tiré de [53])	147
Figure 7.9: Exemple de résultat d'essai: Rapports de couple et de transmission (tiré de [53])	148
Figure 7.10: Exemple de résultat d'essai: Rendement (tiré de [53]).....	149
Figure 8.1: Illustration de la zone d'interférence et des corrections envisageables.....	154
Figure 8.2: Problème de point de rebroussement sur le profil conjugué en couple de la développante (cas du Chapitre 6 : cf. Figure 6.19)	155
Figure 8.3: Profil présenté à la Figure 8.2, avec la zone après le point de rebroussement supprimée, et représentation du diamètre de fond de dent standard en mécanique ($h_f = 1.25 m$).....	155
Figure 8.4: Illustration de l'idée du profil reconstruit à partir de plusieurs profils conjugués calculés pour des entraxes différents	156
Figure 8.5: Combinaisons de paramètres de calcul évaluées.....	157
Figure 8.6: Combinaison de paramètres de calcul manquante	157
Figure 8.7 : Reprise de la Figure 5.5 (Exemple d'engrenage non-circulaire (tiré de [44])) .	158
Figure A. 1 : Disposition des cercles (reproduction de la figure 182 de [3])	165
Figure A. 2 : Schéma des vitesses au point de contact.....	166
Figure B. 1 : Disposition des éléments nécessaires à la génération de la cycloïde.....	171
Figure D. 1 : Exemple de résultat pour la développante (taillage sans interférence nbre de dents=35 ; module =1)	187
Figure E. 1 : Exemple de résultat d'évaluation des types de splines.....	189

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Valeurs de paramètres pour profil LogiX (source:[12]).....	20
Tableau 6.1 : Comparaisons des variations de performances dues à des erreurs de forme	129
Tableau 6.2: Comparaison des différentes erreurs. Les chiffres présentés entre parenthèses indiquent les augmentations par rapport au comportement nominal.	130
Tableau 7.1: Cahier des charges fonctionnel.....	139
Tableau 7.2: Erreurs de positionnement.....	142

Table des équations

Équation 1.1	12
Équation 1.2	13
Équation 1.3	15
Équation 1.4	16
Équation 1.5	18
Équation 1.6	20
Équation 1.7	22
Équation 1.8	22
Équation 1.9	26
Équation 1.10	26
Équation 1.11	27
Équation 1.12	27
Équation 1.13	27
Équation 1.14	27
Équation 1.15	28
Équation 1.16	28
Équation 1.17	28
Équation 1.18	28
Équation 1.19	29
Équation 1.20	30
Équation 1.21	30
Équation 1.22	30
Équation 1.23	30
Équation 1.24	30
Équation 1.25	30
Équation 1.26	30
Équation 1.27	31
Équation 1.28	31
Équation 1.29	31
Équation 1.30	31
Équation 1.31	39
Équation 1.32	40
Équation 1.33	42
Équation 2.1	49
Équation 2.2	51

Équation 2.3	52
Équation 2.4	52
Équation 2.5	54
Équation 2.6	54
Équation 2.7	54
Équation 2.8	54
Équation 2.9	54
Équation 2.10	55
Équation 2.11	56
Équation 2.12	57
Équation 2.13	57
Équation 2.14	58
Équation 2.15	59
Équation 2.16	59
Équation 2.17	59
Équation 2.18	60
Équation 2.19	61
Équation 2.20	62
Équation 2.21	62
Équation 2.22	62
Équation 2.23	62
Équation 2.24	63
Équation 2.25	63
Équation 2.26	63
Équation 2.27	64
Équation 2.28	64
Équation 2.29	64
Équation 2.30	64
Équation 3.1	73
Équation 3.2	73
Équation 3.3	73
Équation 3.4	73
Équation 3.5	73
Équation 3.6	74
Équation 3.7	77
Équation 4.1	83

Équation 4.2	84
Équation 4.3	84
Équation 4.4	84
Équation 4.5	84
Équation 4.6	85
Équation 4.7	85
Équation 4.8	85
Équation 4.9	85
Équation 4.10	85
Équation 4.11	85
Équation 4.12	86
Équation 4.13	86
Équation 4.14	86
Équation 4.15	87
Équation 4.16	87
Équation 4.17	87
Équation 4.18	87
Équation 4.19	87
Équation 4.20	87
Équation 4.21	88
Équation 4.22	88
Équation 4.23	89
Équation 4.24	89
Équation 4.25	89
Équation 4.26	89
Équation 4.27	89
Équation 4.28	90
Équation 4.29	90
Équation 4.30	90
Équation 4.31	90
Équation 4.32	90
Équation 4.33	91
Équation 4.34	91
Équation 4.35	91
Équation 4.36	91
Équation 4.37	92

Équation 4.38	92
Équation 4.39	92
Équation 4.40	92
Équation 4.41	92
Équation 4.42	93
Équation 4.43	93
Équation 4.44	93
Équation 5.1	96
Équation 5.2	104
Équation 5.3	105
Équation 5.4	113
Équation 5.5	114
Équation 5.6	114
Équation 5.7	114
Équation 5.8	114
Équation 7.1	148
Équation 7.2	148
Équation 7.3	148
Équation A. 1	167
Équation A. 2	167
Équation A. 3	167
Équation A. 4	167
Équation A. 5	167
Équation A. 6	167
Équation A. 7	167
Équation A. 8	168
Équation A. 9	168
Équation A. 10	168
Équation A. 11	168
Équation A. 12	168
Équation A. 13	168
Équation A. 14	169
Équation A. 15	169
Équation A. 16	169

Équation B. 1	171
Équation B. 2	171
Équation B. 3	172
Équation B. 4	172
Équation B. 5	172
Équation B. 6	172
Équation B. 7	173
Équation B. 8	173
 Équation D. 1	 187
 Équation E. 1	 190
Équation E. 2	190
Équation E. 3	190
Équation E. 4	190

Introduction

Ce travail de thèse est issu d'un projet de recherche et développement industriel. Le partenaire industriel ayant financé le projet et la thèse est spécialisé dans la manufacture de produits d'horlogerie de haute qualité, et désirait améliorer ses connaissances dans le domaine des engrenages. Dans cette optique, il a été décidé que le développement d'un outil de simulation numérique aidant la conception des trains d'engrenages aux performances optimisées selon des critères horlogers serait une contribution utile et potentiellement originale. Pour que l'outil soit intéressant, il fallait qu'il puisse tenir compte des particularités de l'horlogerie, à savoir :

1. l'utilisation de profils très variés et différents du profil en développante de cercle traditionnellement utilisé en mécanique,
2. des imprécisions de positionnement relatives importantes, inhérentes à l'échelle de travail en horlogerie.

Il s'agissait également de proposer une méthode de génération de profils qui respectent des conditions différentes de celles traditionnellement utilisées : la conjugaison cinématique. On a donc choisi de mettre l'accent sur le développement d'une théorie permettant de respecter une condition de conjugaison statique (rapport de couple), que l'on a nommée : conjugaison en couple. En effet, le maintien d'un rapport de couple constant s'avère une performance intéressante pour certains étages de la chaîne de transmission d'un mouvement horloger.

Le partenaire industriel a également fixé comme objectif du projet général, le développement d'un banc d'essai ainsi que la validation expérimentale des résultats de l'outil de simulation.

La thèse traite principalement du développement et de la validation de l'outil informatique de génération et de simulation d'engrenages avec des conditions de conjugaison généralisées (cinématique et en couple). Ce code est destiné au concepteur des chaînes cinématiques horlogères, et lui apporte une alternative de calcul lui permettant d'envisager la conception des chaînes selon d'autres critères, tout en simplifiant le travail d'optimisation. En plus de réaliser ce code, l'auteur de la thèse a assumé la tâche de chef de projet en supervisant le travail de plusieurs collaborateurs et étudiants s'attelant à la conception et la réalisation du banc d'essai. Cette expérience lui a permis d'élargir le domaine de ses compétences au-delà des objectifs spécifiques de la thèse, tant au niveau scientifique qu'humain. Les travaux issus de ces collaborations, dûment référencés, ont pu être intégrés à ce travail de thèse et y ont apporté des aspects plus pratiques tels que la conception mécanique et l'expérimentation.

La suite de ce document est organisée de la façon suivante :

Le Chapitre 1 expose l'état de l'art dans le domaine des engrenages et plus particulièrement des engrenages horlogers. On traite des différents profils et configurations existants, des techniques actuelles utilisées pour la génération et l'analyse des performances des engrenages de mécanique, ainsi que des spécificités des engrenages utilisés en horlogerie. Cette synthèse permet d'identifier les lacunes de connaissances et nous amène à formuler le postulat sous-tendant cette thèse.

Le Chapitre 2 présente la théorie utilisée pour analyser les performances des profils soumis aux conditions de fonctionnement inhérentes à l'horlogerie. On y décrit la paramétrisation des profils utilisée, les équations permettant le calcul du contact géométrique, ainsi que les équations permettant le calcul du rapport cinéma-

tique, du rapport de conduite, du rapport de couple et du rendement. On présente également de quelle manière représenter les erreurs de positionnement des engrenages ainsi que les erreurs de forme.

Le Chapitre 3 reprend les concepts mis en place au Chapitre 2, et présente de quelle manière on les a implémentés dans un code de simulation numérique. On présente sous quelle forme les profils ont été codés, ainsi que les algorithmes et techniques informatiques employés pour analyser leurs performances. Le code est également validé par l'étude des résultats obtenus par simulation du comportement de profils dont les performances peuvent être déterminées analytiquement de façon indépendante.

Le Chapitre 4 présente les équations de conjugaison cinématique des profils, ainsi que le développement des équations de conjugaison en couple.

Le Chapitre 5 reprend les équations présentées au Chapitre 4 et expose la technique permettant le calcul numérique d'un profil conjugué en couple.

Le Chapitre 6 traite de différentes applications de l'outil d'analyse ainsi que de l'outil de génération des profils. On y expose les capacités du code d'analyse, et on présente quelques cas de conjugaison correspondant à des types de rapport de transmission similaires à ce qui se fait dans l'horlogerie.

Le Chapitre 7 présente le banc d'essai, tant au niveau de la conception que de la mise en service et des essais effectués.

Le Chapitre 8 clôture la thèse en discutant, résumant et critiquant l'ensemble du travail. Il propose aussi les futures directions de recherche envisageables.

La conclusion résume les résultats principaux de la thèse et mentionne les emplois possibles du travail exposé.

Nomenclature et conventions

Profils

Sauf mention contraire, les profils sont considérés comme normés par le module.

Notation

Les équations présentées dans le texte faisant souvent appel à des vecteurs et matrices, la notation suivante a été adoptée :

r	Minuscule italique : scalaire (norme du vecteur équivalent)
r_x	Minuscule italique avec indice x ou y : composante x ou y du vecteur
\mathbf{r}	Minuscule gras : vecteur
\mathbf{M}	Majuscule gras : Matrice
\bar{a}	Valeur surlignée : valeur moyenne

Liste des variables

\mathbf{r}_i	Vecteur, fonction représentant le profil i	$c_{x,y}$	Coordonnée x ou y du pôle
u	1 ^{ère} abscisse curviligne du profil	p_i	Pas de la roue dentée i
θ	2 ^{ème} abscisse curviligne du profil	j	Rapport de couple
r_b	Rayon de base	η	Rendement
r_p	Rayon primitif	P	Puissance
κ	Courbure	h	Hauteur de dent
z_i	Nombre de dents de la roue i	h_a	Hauteur de la saillie
m	Module	\mathbf{v}_{12}	Vitesse de glissement d'une paire de dents 1-2
\mathbf{E}	Vecteur entraxe	C_i	Couple de la dent i
E	Norme de l'entraxe	S_i	Repère i
$\boldsymbol{\omega}_i$	Vecteur vitesse de rotation de la roue i	O_i	Origine du repère S_i
ω_i	Norme de la vitesse de rotation i	gs	Glissement spécifique
\mathbf{n}_i	Normale au profil i normée	j_-	Limite géométrique restreinte
μ	Coefficient de frottement	j_+	Limite énergétique restreinte
\mathbf{M}_{ab}	Matrice de passage du repère b vers le repère a	\mathbf{S}	Opérateur de symétrie
$\hat{\mathbf{e}}_{x,y,z}$	Vecteur unitaire décrivant la direction x, y , ou, z dans un repère cartésien	\mathbf{F}	Vecteur force
\mathbf{R}	Matrice de rotation		
$f_{i,err}$	Fonction erreur de profil pour la roue i		
$\mathbf{r}_{i,err}$	Profil i soumis à l'erreur $f_{i,err}$		
m_{21}	Rapport de transmission instantané (ω_2/ω_1)		
i	Rapport de transmission instantané inverse ($1/m_{21}$)		
ϕ_i	Angle de rotation de la roue i		

Chapitre 1 Etat de l'art

1.1 Introduction

Ce chapitre recense le savoir existant sur les engrenages d'horlogerie. Cet état de l'art doit permettre de mettre en évidence les lacunes de connaissances qui demandent un approfondissement soit d'un point de vue théorique, soit d'un point de vue plus fonctionnel et appliqué. Etant donné le domaine très vaste que représentent les engrenages et même celui plus restreint des engrenages d'horlogerie, nous nous limitons ici aux aspects importants touchant à l'objectif général du projet industriel dans le cadre duquel a été réalisée cette thèse, à savoir le développement d'outils de conception de trains d'engrenages optimisés pour l'horlogerie. Nous ne traitons en particulier que d'engrenages à géométrie de base cylindrique circulaire.

Le chapitre commence par la définition fonctionnelle d'un engrenage et des diverses configurations géométriques possibles et se poursuit par la description des différents profils utilisés pour les dentures, et de leurs propriétés. Il présente les théories graphiques et analytiques pour la génération de profils dits conjugués et les lois régissant l'engrènement. Les aspects spécifiques des engrenages d'horlogerie sont ensuite passés en revue. Une section est en particulier consacrée aux erreurs géométriques, qui jouent un rôle important pour les applications microtechniques, et à leur modélisation. Le chapitre traite aussi des conditions statiques au point de contact et de leurs conséquences tribologiques. Il conclut par un bilan synthétique des connaissances et des besoins en approfondissement qui permet de formuler le postulat sous-jacent à cette thèse de doctorat.

1.2 Définition et fonction d'un engrenage

Un engrenage est un dispositif de transmission de mouvement par obstacle. Les engrenages servent principalement à transmettre une rotation d'un axe vers un autre. Les éléments de transmission sont appelés roues dentées, et sont composés d'un corps garni d'un nombre donné de dents faisant office d'obstacle pour permettre la transmission. Un engrenage est le dispositif formé par deux roues dentées, dont la plus grande est appelée « roue », et la plus petite « pignon », et ceci indépendamment du sens du flux de l'énergie. Le comportement d'un engrenage est généralement décrit par un rapport de vitesse (rapport des vitesses de rotation de la roue et du pignon) nommé rapport de transmission, dont la valeur est fixée à la construction, mais peut être constante ou cyclique. La forme géométrique de la surface de contact des dents, nommée profil, joue un rôle essentiel dans le comportement d'un engrenage.

La première évocation des engrenages date de l'antiquité. Des écrits grecs du 3^{ème} siècle avant notre ère mentionnent déjà l'utilisation de ce type de construction pour la transmission d'efforts [1]. Depuis lors, les engrenages n'ont jamais disparu. On les retrouve au Moyen-Âge dans les moulins sous forme d'engrenages en bois à fuseau. A l'époque, la première préoccupation des fabricants était qu'ils remplissent leur fonction de transmission d'effort et de mouvement, sans autre considération tribologique ou de précision cinématique.

Au XVIII^{ème} siècle, on apprend que les horlogers utilisaient des dents plus évoluées mais qui ne s'appuyaient pas sur des définitions géométriques ou mathématiques précises des profils. Les premiers

développements significatifs semblent provenir de Camus, qui proposa son théorème (connu donc sous le nom de « Théorème de Camus ») qui décrit une méthode pour générer des engrenages à profils cycloïdaux. [2, 3]

A peu près à la même époque, Euler, proposait comme profil d'engrenage la développante de cercle [4], après avoir identifié la propriété qu'a ce profil de maintenir constante la direction de transmission de force durant tout le contact. Ce profil ne fut adopté que plus tard, à cause de la difficulté de fabrication qu'il représentait.

Les engrenages n'ont dès lors pas cessé de se développer, surtout depuis la révolution industrielle. Depuis, on continue à les améliorer, tant d'un point de vue cinématique qu'énergétique en proposant par exemple des corrections de dentures pour que la géométrie sous charge corresponde à la géométrie idéale.

Nous faisons ici une synthèse des développements en matière d'engrenage réalisés jusqu'à maintenant, en nous focalisant particulièrement sur l'application que fait l'horlogerie de ces éléments de transmission.

1.3 Configurations standards d'engrenage

Sur la base de la position relative des axes de rotation, on distingue trois configurations différentes d'engrenages, qui correspondent chacune à des problèmes différents.

1. Engrenage plan (Figure 1.1 et Figure 1.2)
 - a. Extérieur
 - b. intérieur
2. Engrenage concourant (Figure 1.3 et Figure 1.4)
3. Engrenage gauche (Figure 1.5 et Figure 1.6)

Les deux premiers cas représentent des cas particuliers des engrenages gauches, dont la position des axes de rotations est ramenée dans un seul plan.

1.3.1 Engrenage plan

Il s'agit de la configuration la plus fréquente pour les engrenages. Les engrenages plans ont des axes de rotations parallèles.

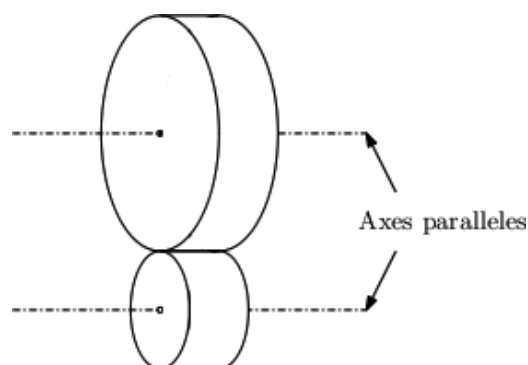


Figure 1.1: Engrenage plan: disposition des axes

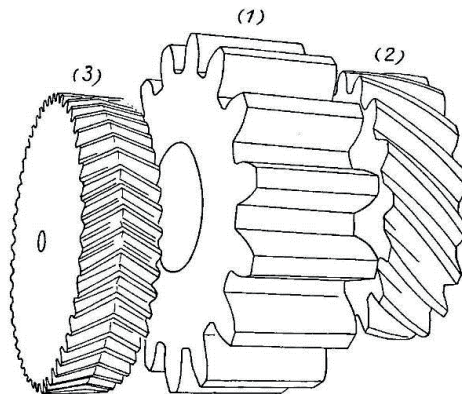


Figure 1.2: Roues d'engrenage plan; (1) denture droite; (2) hélicoïdale; (3) double hélice (source : [5])

1.3.2 Engrenage à axes concourants

Ces engrenages ont des axes de rotations non parallèles, mais qui se coupent. Les engrenages les plus courants de cette catégorie sont les renvois d'angle.

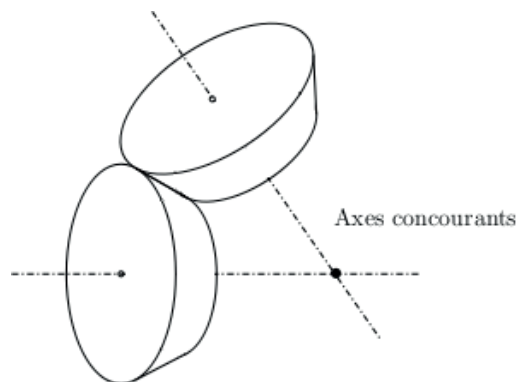


Figure 1.3: Engrenage à axes concourants : disposition des axes

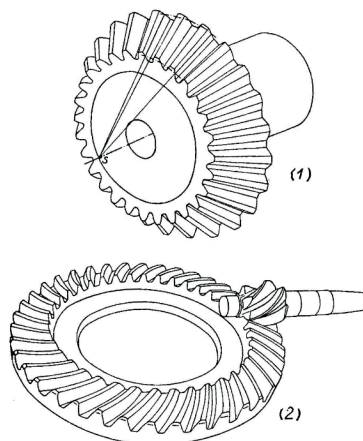


Figure 1.4: Engrenages à axes concourants; (1) Conique; (2) Spiral (source : [5])

1.3.3 Engrenage gauche

Ce type d'engrenage comprend tous ceux qui ne peuvent être contenus dans les autres catégories. Ils sont les plus difficiles à aborder.

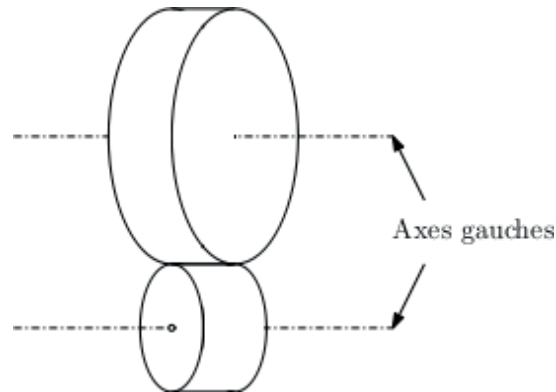


Figure 1.5: Engrenage gauche, disposition des axes

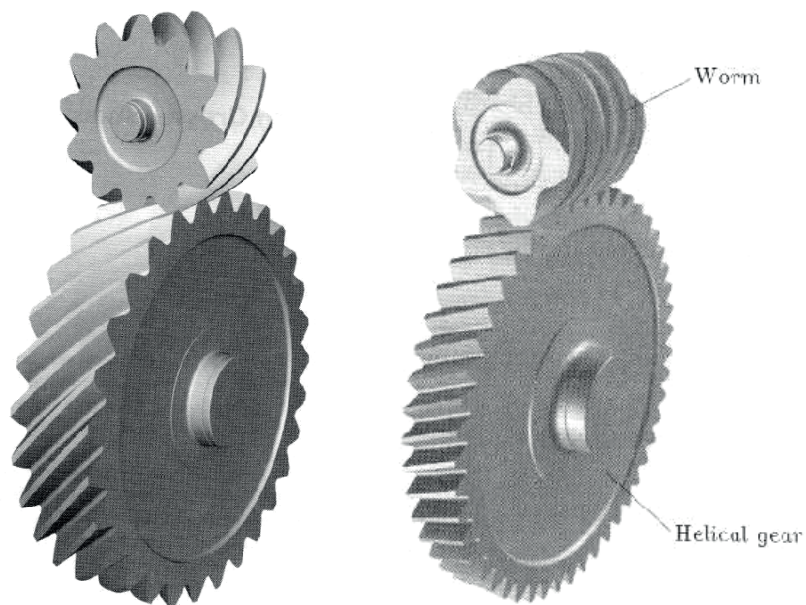


Figure 1.6: Engrenages gauches : hélicoïdal et vis sans fin (source [6])

Cette classification est celle reprise dans le traité d'Henriot [5]. Dans d'autres ouvrages, plus particulièrement les ouvrages anglo-saxons, on classe les engrenages par leurs « types » d'axodes. Ce terme anglo-saxon désigne le lieu des axes instantanés de rotation dans les repères tournants avec les roues, ce qui donne la forme qu'a la surface de la roue dentée supportant les dents. (Figure 1.7).

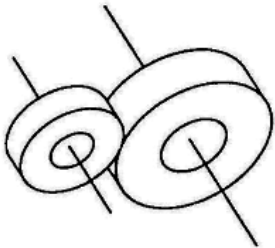
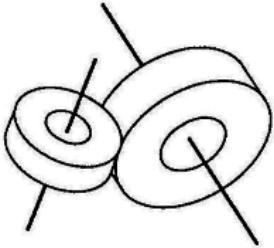
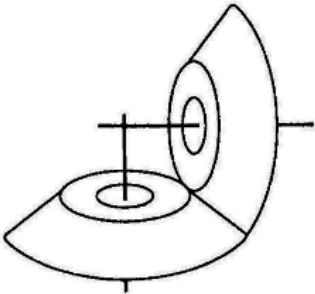
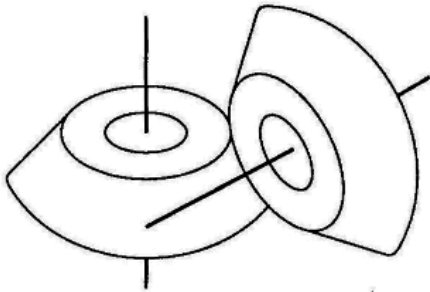
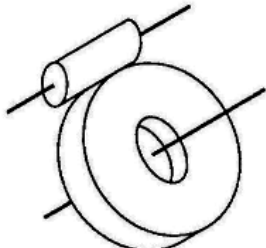
Illustration	Gear Type/Name
	<ul style="list-style-type: none"> • Planar gearing • Cylindrical gearing • Parallel axis gearing
	<ul style="list-style-type: none"> • Crossed helical gearing • Crossed-axis gearing • Nonenveloping worm gearing
	<ul style="list-style-type: none"> • Conical gearing • Bevel gearing • Zerol gearing • Beveloid gearing
	<ul style="list-style-type: none"> • Hypoidal gearing • Hypoid gearing • Skew axis gearing • Skew bevel gearing • Spiroid gearing • Helicon gearing
	<ul style="list-style-type: none"> • Worm gearing • Single enveloping worm gearing • Double enveloping worm gearing • Globoidal gearing • Hourglass gearing

Figure 1.7: Types d'engrenages (classification anglo-saxonne[7])

1.4 Profils standards

1.4.1 Terminologie

Le domaine des engrenages possède évidemment des définitions et des termes qui lui sont propres. Nous définissons ci-dessous les principaux termes utilisés dans la littérature.

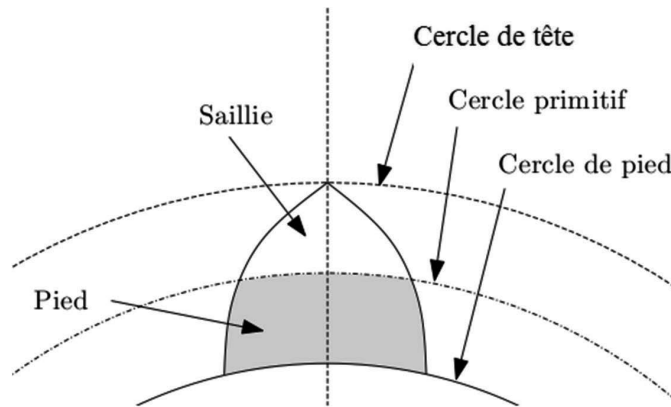


Figure 1.8: Nomenclature des cercles

Dans un engrenage, le mouvement se passe comme si les roues roulaient sur leurs cercles primitifs respectifs. Le cercle primitif correspond au cercle qui serait utilisé si l'on souhaitait faire cette transmission de mouvement par roues de friction sans glissement. Le *cercle primitif* est utilisé comme référence bien que ce ne soit pas le cercle qui détermine l'encombrement de la roue dentée : cet encombrement est défini par le *cercle de tête*, le cercle qui passe par le sommet des dents. On définit aussi un *cercle de pied* qui correspond au cercle qui passe par la base des dents. Ainsi, une dent se situe entre le cercle de pied et le cercle de tête (Figure 1.8). En plus de ces cercles, on définit également un *cercle de base* (non représenté sur la Figure 1.8 car différent pour chaque profil) qui est le cercle sur lequel roule l'élément générateur du profil (si cet élément existe). On donne plus de détails sur ce cercle dans les paragraphes traitant des profils (§ 1.4.2; 1.4.3, 1.6.2).

Sur les dents elles-mêmes, on distingue deux parties différentes, la *saillie* et le *pied*. La saillie est la partie de la dent en-dessus du cercle primitif, alors que le pied est la partie de la dent en-dessous du cercle primitif. On trouve parfois le mot de *tête* pour désigner la saillie.

Les flancs des dents d'une roue dentée suivent une forme géométrique bien définie que l'on appelle *profil*. Les spécificités des profils sont décrites dans les paragraphes suivants.

Pour la construction des roues dentées, une grandeur appelée *module* a été introduite. Le module d'un engrenage est défini comme le rapport du diamètre primitif au nombre de dents. Il s'agit d'une échelle définissant la taille de la roue. Dans les normes, toutes les grandeurs se réfèrent au module. Ainsi si on connaît le module d'une roue d'engrenage et son nombre de dents, on peut calculer toutes ses autres grandeurs géométriques. Deux roues dentées s'engrènent entre elles uniquement si elles ont le même module, donc si elles sont à la même échelle. Le module est en général donné en [mm].

En plus des grandeurs géométriques définissant chaque roue d'un engrenage, on définit également deux lignes, la *ligne des centres* ainsi que la *ligne d'engrènement* (ces éléments sont illustrés aux §1.4.2 et 1.4.3).

Ces deux lignes ne sont pas liées entre elles. La ligne des centres est une droite uniquement définie pour un engrenage plan et qui passe par les centres de rotations des roues dentées. La ligne d'engrènement dépend du profil de l'engrenage. Il s'agit du lieu des points de contact entre les dents du pignon et de la roue vu par un observateur externe.

L'intersection de ces deux lignes (ligne d'engrènement et ligne des centres) est appelé le *pôle*. Lorsque le point de contact est confondu avec le pôle, on se trouve sur un point singulier où la vitesse de glissement entre les deux dents en contact est nulle, ainsi que le frottement.

On introduit également la notion d'*angle de pression*, qui correspond à l'angle complémentaire à l'angle formé par le vecteur de la force de contact et la ligne des centres.

On définit également la distance entre les centres des roues comme étant l'*entraxe*. Dans le cas plan, cette valeur correspond généralement à la somme des rayons des cercles primitifs des roues formant l'engrenage. On nomme erreur d'entraxe la valeur qui correspond à la différence entre l'entraxe nominal et sa valeur réelle.

Dans un couple de roues dentées, il y a toujours la *roue* et le *pignon*. Ces termes désignent respectivement la plus grande et la plus petite roue dentée de ce couple, quelle que soit la *menée* ou la *menante*. La menée est la roue de sortie du système, alors que la menante est la roue d'entrée. Ainsi, dans un réducteur, la menante est le pignon, et la menée la roue, alors que dans un engrenage multiplicateur, qui est le cas le plus courant en horlogerie, la menante est la roue et la menée le pignon.

Les engrenages sont traditionnellement définis par une *crémaillère de taillage* (parfois aussi nommée *crémaillère de référence*) qui permet de déduire l'ensemble des informations nécessaires à la construction de la roue dentée. Il s'agit d'un « pseudo-outil » purement théorique qui correspond à la forme que devrait posséder la crémaillère qui taillerait (ou générerait) la roue dentée. Cette notion est très courante en mécanique traditionnelle pour définir une norme d'engrenage. On précise que cette approche est généralement réservée au profil en développante de cercle.

1.4.2 Le profil à développante de cercle

La développante de cercle est la forme la plus courante de profil d'engrenage. Elle est celle utilisée dans tous les engrenages mécaniques standards. La développante présente les avantages et désavantages suivants.

Avantages :

- Indépendance de la cinématique aux erreurs d'entraxe
- Direction de la force normale au point de contact tangente simultanément aux cercles de base des 2 roues
- Angle de pression constant durant l'engrènement

Désavantages :

- Pression de contact élevée ce qui rend la dent susceptible à l'écaillage
- Interférence pour les petits nombres de dents et les rapports de transmission élevés[5, 8]

La développante de cercle est la courbe tracée par un point fixe d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle, appelé cercle de base (voir Figure 1.9). La courbe a la propriété remarquable que toutes les droites contenues dans son plan et qui lui sont normales, sont tangentes au cercle de base.

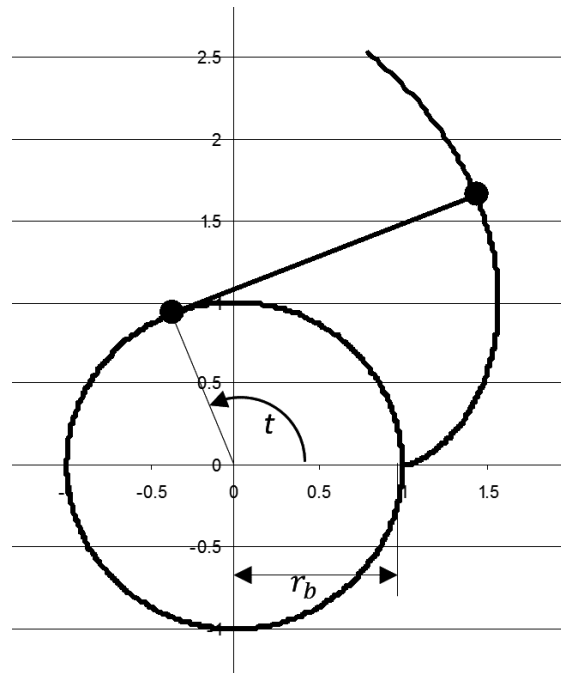


Figure 1.9: Exemple de développante de cercle

L'équation paramétrique de la développante de cercle est :

$$\mathbf{r}(t) = r_b \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}$$

Équation 1.1

Où t est le paramètre, soit l'angle de rotation de la droite génératrice (voir Figure 1.9) et r_b est le rayon du cercle de base.

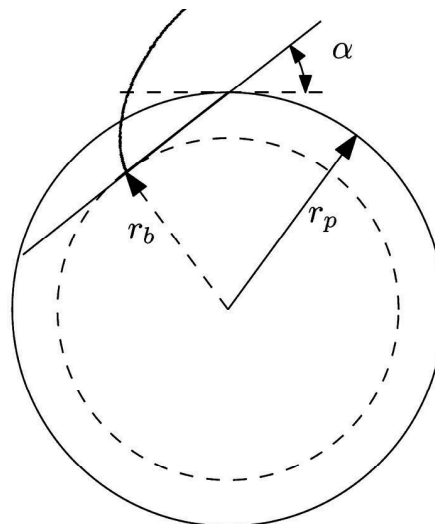


Figure 1.10: Illustration du lien entre la développante, le cercle de base (r_b), l'angle de pression (α) et le cercle primitif(r_p)

Le rayon de base se calcule à partir de l'angle de pression (cf. Figure 1.10) et du diamètre primitif de la façon suivante :

$$r_b = r_p \cos \alpha$$

Équation 1.2

Les cercles primitifs des engrenages à développante ne sont jamais les cercles servant de base à la développante.

Ce profil trouve une très importante utilisation, car il a une propriété dont ne jouissent pas les autres profils, celle que la cinématique d'engrènement est conservée, quel que soit l'entraxe. Les articles [9, 10] démontrent qu'aucun autre profil que la développante ne peut avoir cette propriété. Seul l'angle de pression α est modifié, ainsi que le rapport de conduite. On peut donc affirmer que la cinématique d'un engrènement à profil en développante, *ne dépend que des cercles de base*, et non pas des cercles primitifs ni de l'angle de pression. C'est d'ailleurs cette propriété qui lui permet d'être utilisé alors qu'il ne satisfait pas le théorème de Camus (notion détaillée dans le §1.6.2). Cette propriété permet également de faire ce qu'on appelle des *corrections de denture par déport*. Il s'agit là de satisfaire des exigences particulières, comme par exemple des rapports de transmission ne permettant pas de satisfaire aux exigences d'entraxe, ou d'éviter des interférences.

Le profil d'engrenage le plus courant est le profil en développante à angle de pression de 20° , ce qui signifie que les flancs de la crémaillère de taillage sont inclinés de 20° par rapport à la normale au sens d'avance, et aussi que la ligne d'engrènement est inclinée à 20° par rapport à la ligne des centres. Le choix de cet angle est un compromis entre deux exigences différentes, d'une part la valeur du rapport de conduite (nombre de dents en prise dans un engrenage), que l'on désire supérieur à 1 et d'autre part la résistance mécanique des dents. Si on prend un angle faible, mais toutefois suffisant pour éviter les interférences, le pied de dent est relativement fin. La taille du pied augmente avec l'angle, mais le rapport de conduite diminue. L'Europe a donc choisi l'angle de 20° comme compromis, alors que les normes des USA spécifient 14.5° mais également 20° et 25° [11].

Pour les engrenages à profil de développante, la ligne d'engrènement, le lieu des points de contact dans le référentiel fixe (Figure 1.11), est formée d'une droite tangente aux cercles de base des roues en contact. Pour un couple menant constant, la force de contact reste donc constante durant tout l'engrènement, ce qui représente un des plus grands avantages de ce profil, et permet d'éviter les vibrations dues aux variations d'effort.

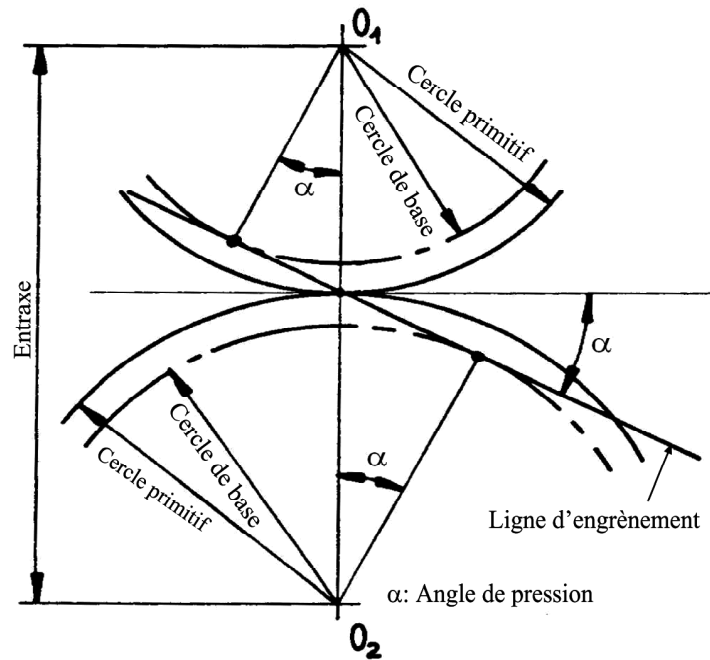


Figure 1.11: Développante: cercles de base, cercles primitifs et ligne d'engrènement

1.4.2.1 Déports de dentures.

Une technique couramment utilisée dans la mécanique traditionnelle afin de satisfaire des exigences particulières d'encombrement, de rapport de transmission ou de résistance, est ce qu'on appelle le déport de denture. Cette technique est utilisable *uniquement avec des profils à développante de cercle*, car elle nécessite l'invariance de la cinématique à l'entraxe. Comme indiqué plus haut, un déport ne modifie pas la cinématique de l'engrènement.

Le chapitre 4 de Henriot [5], décrit les avantages et la mise en œuvre de ce principe. On peut distinguer deux cas distincts de déport :

1. Déport avec variation d'entraxe
2. Déport sans variation d'entraxe

Dans le premier cas, l'entraxe nominal est modifié par le déport, alors que dans le deuxième, on conserve l'entraxe. Dans le premier cas, la plupart du temps le déport intervient alors que des exigences cinématiques ne conviennent pas à l'entraxe disponible. Dans le deuxième cas, il s'agit plus souvent de limiter les interférences ou de fournir au pignon une résistance mécanique plus élevée. On parle de déport positif/négatif pour qualifier le déport effectué sur la roue et/ou le pignon. Le déport est positif si la denture est « décalée » vers des rayons plus grands, et négatif si la denture est décalée vers des rayons plus faibles. Si la roue et le pignon sont tous deux déportés positivement, alors l'entraxe est plus grand que pour le cas nominal. Les effets des déports peuvent se résumer comme suit :

Effets du déport positif sur pignon :

- Augmentation de la largeur du pied de dent (si pas d'interférence)
- Diminution du risque d'interférence
- Augmentation de l'angle de pression (si la roue n'est pas déportée)

Effet du déport négatif sur roue:

- Diminution de la largeur du pied de dent
- Augmentation du rapport de conduite
- Diminution de l'angle de pression (si le pignon n'est pas déporté)

D'une manière générale, on ne déporte pas négativement le pignon, pour des raisons d'interférence. Un déport positif sur une roue est par contre envisageable.

Lors de déports de denture sans variation d'entraxe, l'angle de pression reste inchangé. Les déports sans variation d'entraxe sont souvent motivés par des considérations d'interférence, mais aussi de résistance mécanique, ou les deux.

1.4.3 Le profil cycloïdal

Le profil cycloïdal est un profil relativement peu utilisé et présent principalement dans les systèmes micro-techniques, et surtout dans l'horlogerie, bien que modifié.

Le profil cycloïdal présente les avantages suivants :

- Glissement relatif plus faible que dans les développantes
- Jamais d'interférence, quel que soit le rapport de transmission
- Pression de contact faible (courbures inversées au point de contact des dents)

Par contre il a les désavantages suivants :

- Extrêmement sensible aux erreurs de positionnement.
- Direction de force très changeante au cours de l'engrènement, ce qui peut conduire à des vibrations à vitesse de rotation élevée
- Pieds des dents plus faibles à module égal (par rapport à d'autres profils)

Le glissement spécifique (gs) est une notion couramment utilisée lorsqu'on considère l'usure des engrenages. Il est défini de la façon suivante :

$$gs = \frac{vit.tg.menant - vit.tg.menée}{vit.tg.élément.consideré}$$

Équation 1.3

où $vit.tg.$ désigne la vitesse tangente au point de contact

Cette grandeur dépend donc de l'élément considéré (menant ou mené). Un engrenage cycloïdal aura donc tendance à s'user moins vite que son équivalent à profil à développante.

Un engrenage cycloïdal est formé de la manière suivante :

Pour *chaque* dent :

- La saillie est une *épicycloïde*
- Le pied est une *hypocycloïde* (voir Figure 1.12)

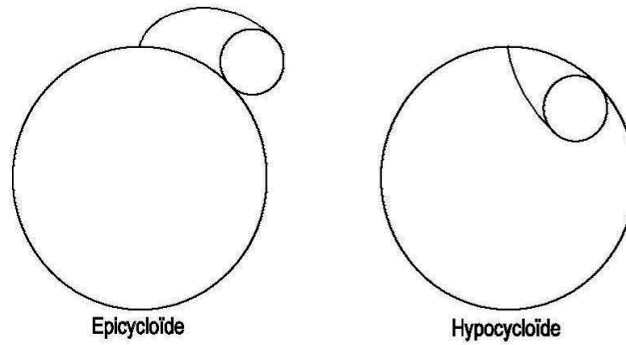


Figure 1.12: Exemple épi-, hypocycloïde

Ces courbes sont générées par des cercles générateurs, dont le diamètre doit être déterminé, et qui roulent sans glisser à l'intérieur (hypocycloïde) ou à l'extérieur (épicycloïde) du cercle de base. Dans un entraînement roue-pignon (menée, menante, peu importe), on a deux cercles générateurs. Le cercle qui génère l'épicycloïde de la roue, est celui qu'on doit utiliser pour générer l'hypocycloïde du pignon. De même, le cercle qui génère l'épicycloïde du pignon est celui qu'on utilisera pour générer l'hypocycloïde de la roue. L'équation paramétrique d'une hypocycloïde est :

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} (R - r) \cos \theta + r \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ (R - r) \sin \theta - r \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{pmatrix}$$

Équation 1.4

Avec R le rayon du cercle de base, et r le rayon du cercle générateur, et θ l'angle de rotation du cercle générateur (par rapport à son propre centre).

Pour l'épicycloïde, on remplace r par $-r$.

La ligne d'engrènement du profil épicycloïdal est formée de deux arcs de cercle, où l'on retrouve les rayons des cercles générateurs r_1 et r_2 . Cette ligne dépend du sens d'engrènement et de la menée. De manière générale, la ligne d'engrènement décrit, avant le passage de la ligne des centres, un arc de cercle dont le rayon est celui du cercle générateur de l'hypocycloïde de la menée, et après le passage de la ligne des centres, on retrouve le rayon du cercle générateur de l'hypocycloïde de la menée.

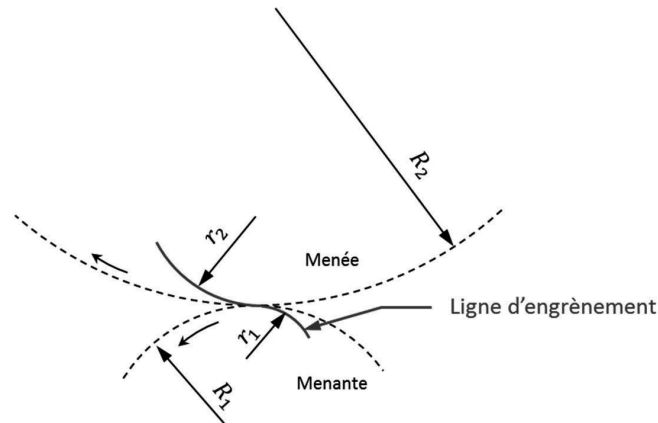


Figure 1.13: Ligne d'engrènement d'un profil cycloïdal

1.4.4 Le profil Wildhaber-Novikov

Ce profil a été proposé dans les années 1950 en Russie comme une alternative aux engrenages à développante. Les engrenages à profil Wildhaber-Novikov sont surtout utilisés dans les réducteurs légers et très chargés (Réducteurs d'hélicoptères par exemple).

Le profil Wildhaber-Novikov présente les avantages suivants :

- Pressions de contact plus faibles
- Engrenage très résistant

Ses désavantages sont qu'il est :

- Bruyant
- Très sensible aux erreurs d'entraxe

Ce profil est particulier car il n'est pas formé à partir d'un quelconque objet roulant sur un cercle de base, mais simplement un arc de cercle (voir Figure 1.14 b). De plus, cet engrenage est utilisé exclusivement en forme hélicoïdale et n'a pas la même forme de dent sur le pignon que sur la roue (Figure 1.14 a).

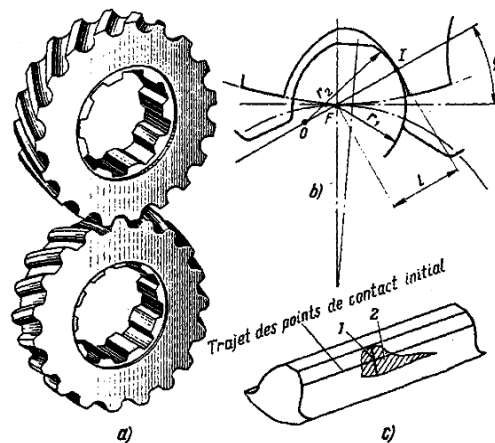


Figure 1.14: Engrenage Wildhaber-Novikov (source : [8])

1.5 Profils non-conventionnels

1.5.1 Le profil LogiX [10, 11]

Ce nouveau profil est censé avoir des propriétés supérieures à celle de la développante et du profil Wildhaber-Novikov (W-N) ; toutefois, il ne semble pas avoir déjà été utilisé. Il est présenté comme étant meilleur au niveau du glissement et des pressions de contact, est vanté comme n'ayant pas d'interférence et comme 2.5 fois plus résistant à la fatigue que le profil à développante correspondant. Pour diminuer les pressions de contact, le profil est construit sur le même type de géométrie que le profil cycloïdal. Le pied est concave, alors que la saillie est convexe (cf. Figure 1.15). Le profil consiste en une succession d'arcs de développante.

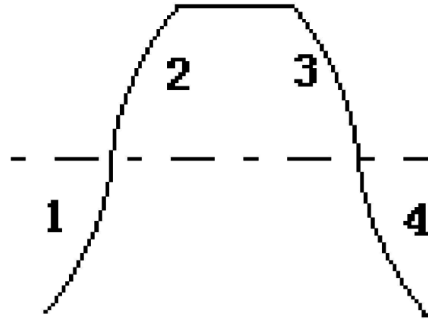


Figure 1.15: Forme de la crémaillère du profil LogiX (source : [12])

Ce profil est développé dans le but de permettre des charges plus importantes que le profil à développante tout en essayant de corriger les défauts du profil Wildhaber-Novikov (W-N), qui doit nécessairement être hélicoïdal. L'idée qui a été utilisée pour créer la forme de ce profil est de fournir un nombre de points à *courbure relative* nulle ainsi qu'à glissement spécifique nul.

Les concepteurs de ce nouveau profil ont donc cherché un point où la valeur du glissement spécifique est nulle, ce qui revient en fait à considérer un point où la vitesse de glissement est nulle.

La courbure relative est une grandeur qui dans le plan est écrite comme :

$$\kappa_r = \frac{1}{\rho_1 + q} + \frac{1}{\rho_2 - q}$$

Équation 1.5

Avec

ρ_1 : le rayon de courbure au point de contact de la roue 1

ρ_2 : le rayon de courbure au point de contact de la roue 2

q la distance entre le pôle et le point de contact

Cette équation est en fait une forme de l'équation d'Euler-Savary qui sera discutée au paragraphe 1.6.3.4 .

Comme indiqué plus haut, le profil LogiX est constitué d'une succession d'arcs de développante (ce nombre étant un des paramètres du profil). La crémaillère de référence est formée de la manière suivante (voir Figure 1.16) :

La connexion entre deux arcs de développante se fait au point S_1 . L'arc m_0-S_1 est une développante du cercle de centre O_1 , dont l'angle δ détermine la longueur. L'arc m_1-S_1 est une développante du cercle de centre O_1' . Le point de raccordement des deux courbes se fait de manière à ce que la courbure des courbes à raccorder soit identique en ce point, donc au point où la perpendiculaire au profil passe par le point de tangence des cercles générateurs. Les cercles générateurs suivants sont déterminés toujours par cette transition de courbes à courbure constante. Ainsi le cercle O_2 (voir Figure 1.17) est déterminé de la façon suivante. Il doit permettre de connecter un arc de développante à la suite du point m_1 et donc de respecter la courbure du profil en construction à ce point. On doit donc déterminer le centre et le rayon (G_2) du cercle O_2 qui permettra la conservation de la courbure. Pour cela, on positionne le centre du cercle O_2 dans le prolongement de la droite formée par O_1' et n_1 . La construction du profil demande que le point n_1 soit le point de tangence entre le cercle O_2 et la droite servant à décrire la développante. Comme on doit conserver la courbure, le rayon G_2 peut être déterminé ainsi que la position exacte du centre du cercle O_2 . On construit en-

suite un nouvel arc (m_1-S_2) qui est lui aussi développé d'un angle δ , et on recommence. L'angle α est l'angle de pression. On voit que la construction de ce profil induit un angle de pression qui va varier le long de l'engrènement.

La construction de ce profil exige le choix de plusieurs paramètres : δ , l'angle qui va définir le nombre d'arcs de développante, G_1 , le premier rayon qui définit le premier arc de développante, et enfin α_0 , qui définira l'angle de pression initial.

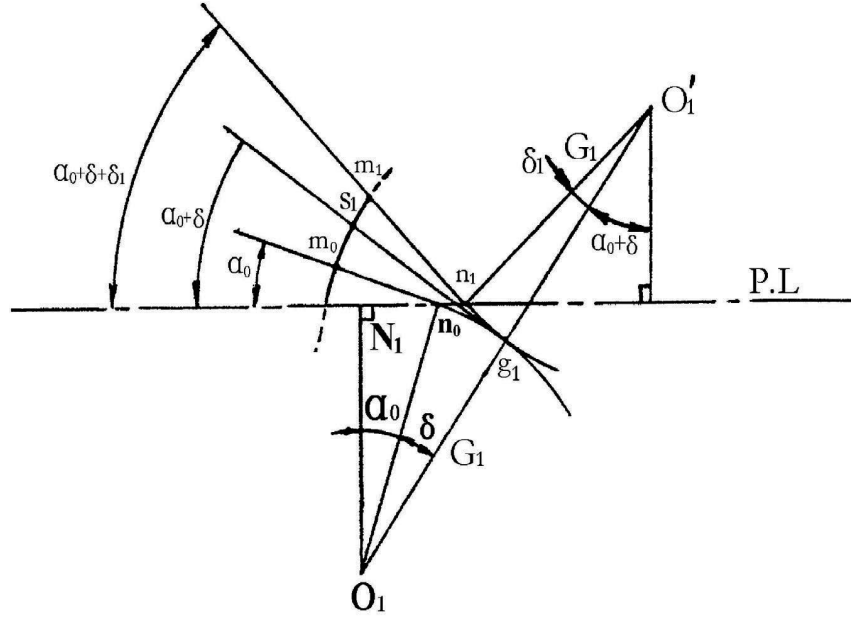


Figure 1.16: Principe de construction du profil LogiX : principe de base (tiré de [12])

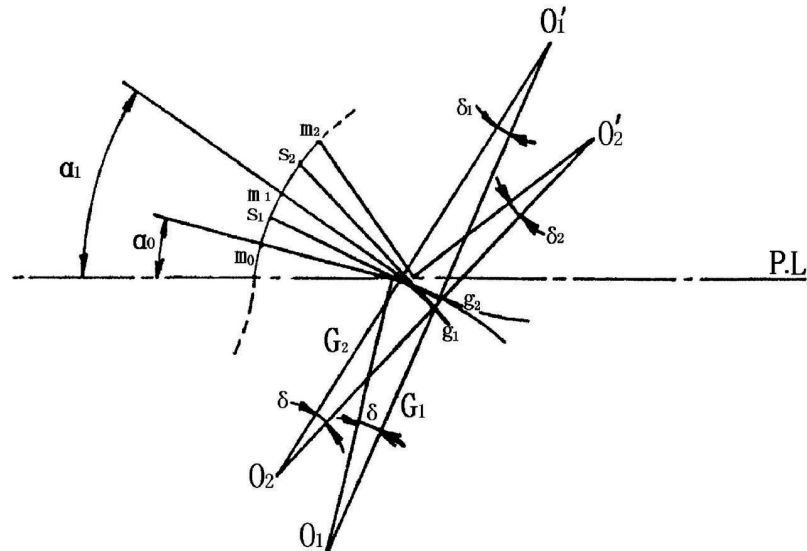


Figure 1.17: Principe de construction du profil LogiX : Technique de raccordement (tiré de [12])

Les créateurs de ce profil ont mis en évidence qu'il permet, avec un certain choix des paramètres, d'avoir un pied de dent concave ce qui permet de diminuer les pressions de contact. La condition à remplir est que le rayon de courbure de l'engrenage à construire doit atteindre une valeur infinie. En utilisant la formule d'Euler-Savary (voir plus bas l'Équation 1.19, formule vraie dès qu'on a un engrenement de profil conjugué et qui autorise des calculs rapides, bien que pas très pratique pour la génération des profils, voir §1.6.3.4), les auteurs déduisent la formule suivante :

$$G_i = m \frac{z_{\min} \sin \alpha_i}{2} (\sin \delta - (1 - \cos \delta) \cot \alpha_i)$$

Équation 1.6

Cette formule permet de calculer le rayon du cercle générateur G_i en fonction du nombre de dents minimum (z_{\min}) et du module (m), ainsi que de l'angle de pression associé (α_i), et de l'angle définissant la longueur du segment (δ).

Ainsi on voit que ce profil a trois paramètres principaux à choisir (en dehors du module) afin de déterminer la denture. La référence [12] propose une série de paramètres en fixant δ à 0.05° , ceci pour des raisons d'usinage (stockage dans la mémoire). Le Tableau 1.1 présente le résultat des expériences numériques menées afin de déterminer les meilleurs paramètres en fonction du module employé.

Tableau 1.1 : Valeurs de paramètres pour profil LogiX (source:[12])

$m(\text{mm})$	α_0	δ	$G_0(\text{mm})$
1	10°	0.05°	6000
2	8.0°	0.05°	9500
4	6.0°	0.05°	10000
5	5.0°	0.05°	11000
6	4.0°	0.05°	12000
8	3.2°	0.05°	12024
10	2.8°	0.05°	14000
12	2.6°	0.05°	16500
15	2.5°	0.05°	20024
18	2.4°	0.05°	30036
20	2.4°	0.05°	35000
22	2.3°	0.05°	38000

où α_0 est l'angle de pression recommandé pour commencer la construction du profil, δ la longueur d'arc de développante utilisé avant de passer à l'arc suivant et G_0 le rayon du cercle générateur (de la développante) initial.

1.5.2 Le profil cosinus [13]

L'idée à l'origine de ce profil est de renforcer le pied de dent, ce que l'on obtient au moyen d'un profil purement cosinus pour le pignon. La référence [13] décrit ensuite le profil conjugué à celui-ci qui est obtenu par la méthode des enveloppes décrite au Chapitre 4. Le but est de trouver un profil qui supporte des charges plus élevées que le profil à développante à module égal. On peut voir sur la Figure 1.18 que le pied du profil cosinus est plus large que celui de la développante. Toutefois le résultat ne semble pas satisfaisant, même s'il semblerait que les taux de glissement soient plus faibles que ceux de la développante. Ce profil fait toujours l'objet de développements.

L'arrivée sur le marché des machines à commande numérique pour l'usinage aide aussi les concepteurs à ne plus trop se soucier des problèmes de fabrication, du moins dans un premier temps.

Dans l'article traitant ce profil [13], la volonté était de créer un profil qui soit conjugué (voir §1.6.1) et donc qui respecte une certaine cinématique, une transmission à rapport constant dans ce cas. L'auteur utilise la technique des enveloppes afin de déterminer le profil conjugué à son profil cosinus. Une fois ces profils obtenus, une série de simulations ont été menées afin de déterminer les propriétés de ces profils conjugués. Il a ainsi été mis en avant que la cinématique de ce profil était bonne pour des conditions d'assemblage parfaite. Le cas avec erreur n'ayant pas été traité, on ne peut se prononcer sur la problématique de l'effet des erreurs. Les capacités de charge sont par contre supérieures à celle de la développante pour le même module. Le glissement spécifique est aussi plus faible, ce qui laisse penser que le rendement ainsi que le taux d'usure de ce profil peuvent être meilleures que pour la développante. Malheureusement il ne semble pas encore exister de validation expérimentale de ce profil et la sensibilité aux erreurs d'alignement n'est pas connue, ce qui est problématique car cette propriété est importante en horlogerie.

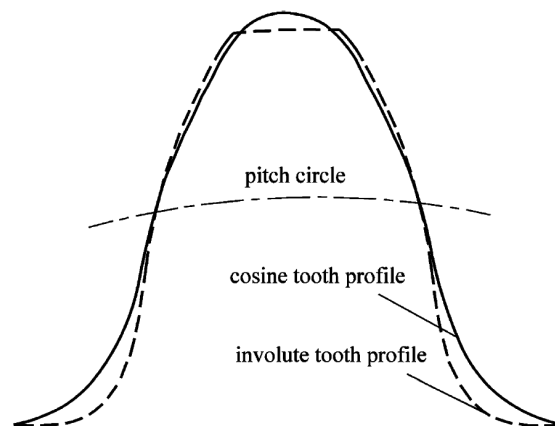


Figure 1.18: Comparaison entre le profil à développante et le profil cosinus (source : [13])

Le profil cosinus de base (mais non le conjugué) est formé de la façon illustrée à la Figure 1.19.

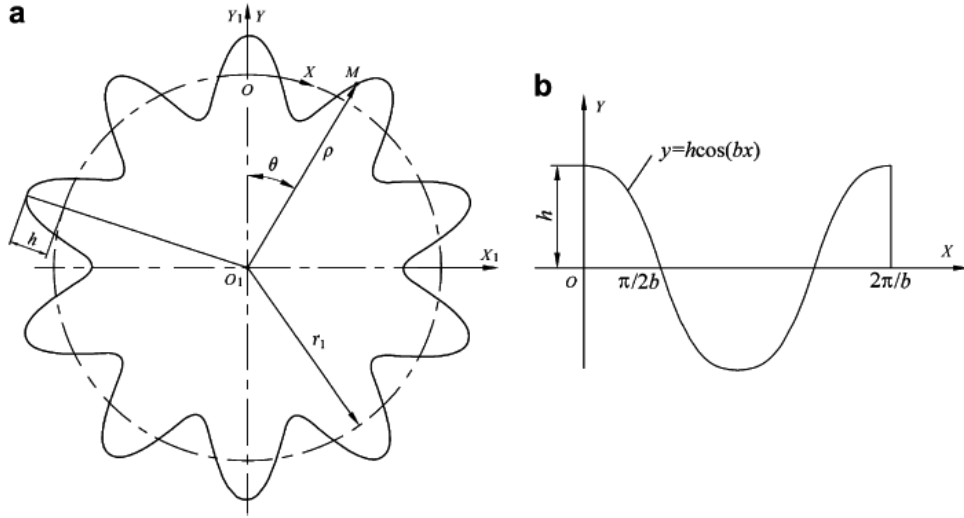


Figure 1.19: Formation du profil cosinus (source [13])

On voit qu'à la différence des profils standards où on a des cercles de tête et de pied afin de lier une dent à l'autre, la roue à denture cosinus n'en possède pas. Le cosinus, est exprimé tel quel sur un axe X « circulaire » qui est le cercle primitif et forme directement les dents. On obtient ainsi, en paramétrant grâce au nombre de dents (z_1) et au module m ($b = \frac{2}{m}$), qui sont les paramètres standards, mais aussi de la hauteur h (voir la Figure 1.19) la description mathématique du profil suivante :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{mz_1}{2} + h \cos(z_1 \theta) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Équation 1.7

Le profil conjugué à \mathbf{r}_1 est déduit d'après la théorie des enveloppes :

$$\mathbf{r}_2 = \frac{mz_1}{2} + h \cos(z_1 \theta) \begin{pmatrix} \sin \left[\theta - \left(1 + \frac{1}{i} \right) \varphi_1 \right] \\ \cos \left[\theta - \left(1 + \frac{1}{i} \right) \varphi_1 \right] \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \sin \frac{\varphi_1}{i} \\ \cos \frac{\varphi_1}{i} \end{pmatrix}$$

Équation 1.8

Avec E l'entraxe des roues, et φ_1 l'angle de rotation de la roue 1 (qui porte \mathbf{r}_1 le profil cosinus)

Les auteurs s'arrêtent là dans la détermination du profil \mathbf{r}_2 , sans préciser le lien entre l'angle θ et φ_1 . Ils fournissent cependant la formule de la ligne d'engrènement, qui elle aussi dépend du lien entre θ et φ_1 . On ne peut donc malheureusement pas dire de quelle forme elle sera, sinon qu'elle ne sera pas droite. L'orientation de la force de contact variera donc. L'invariance de cette orientation n'est toutefois pas la première qualité recherchée pour un profil d'horlogerie.

1.6 Théorie des engrenages

On peut avoir deux visions différentes de la théorie des engrenages qui amènent au même résultat. Historiquement, on a très longtemps généré les profils en les traçant, et les méthodes de détermination des profils relevaient principalement du dessin et de techniques graphiques. Il existe toutefois une approche du problème basée sur la géométrie différentielle, qui prend toute son importance avec l'avènement des méthodes de calcul numérique et des ordinateurs. On expose ici les deux approches.

1.6.1 Profil conjugué : Définition

Deux profils de denture constituant un engrenage sont dit conjugués

« Si la transmission du mouvement est uniforme, c'est-à-dire que le rapport des vitesses est *constant* tout au long de l'engrènement. » [8]

On trouve par contre d'autres définitions, comme par exemple celle de Henriot [5]:

« Les intersections des surfaces de denture d'une roue cylindrique avec un plan perpendiculaire à l'axe sont appelées profils. Il est évident que pendant tout le temps où deux surfaces de denture assurent la transmission, ces deux surfaces doivent rester tangentes. Il faut éviter les contacts suivant des angles vifs, ce qui aurait comme effet immédiat une usure très rapide et des risques de coincement. Dire que les surfaces de dentures doivent être tangentes, cela revient à dire que l'infinité de couples de profils correspondants, obtenus en coupant les surfaces de dentures par différents plans perpendiculaires aux axes doivent rester constamment tangents. On dit alors que les profils sont conjugués. »

On peut toutefois s'apercevoir d'une différence entre les deux définitions. La première est une condition qui s'applique au mouvement des deux roues entre elles et impose un mouvement uniforme, tandis que la seconde décrit plutôt le contact entre les roues et n'impose aucune condition sur la nature du mouvement. Cette deuxième description, plus générale est celle adoptée dans la plupart des ouvrages. Ces définitions se rejoignent sur le fait que la deuxième décrit des engrenages qui respectent la cinématique imposée, quelle qu'elle soit. Donc si on choisit une cinématique à rapport de transmission constant, on retrouve le premier cas. On peut donc dire que la première description est un cas particulier de la deuxième.

On verra dans la suite du texte comment cette notion peut être étendue à des critères différents, notamment statiques.

1.6.2 Génération graphique des profils

La méthode dite des roulettes (voir [5, 14, 15]) permet de générer des profils conjugués de manière graphique et directe. Elle se résume de la manière suivante :

On fait *rouler sans glisser* un corps *générateur* sur le cercle de base de la première roue. La trajectoire de chaque point de ce corps est susceptible de générer un profil (voir Figure 1.20).

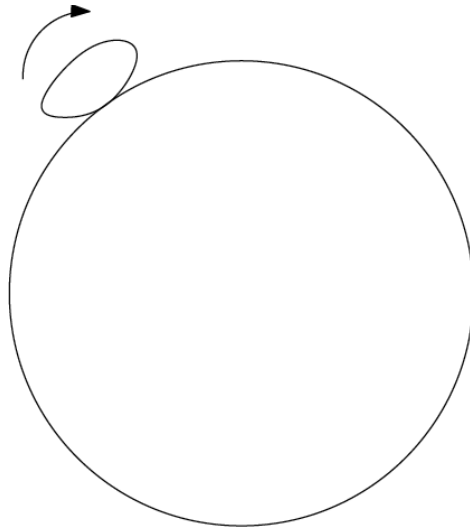


Figure 1.20: Illustration de la méthode des roulettes, génération du profil conjugué de la roue 1

Pour générer le profil conjugué de celui-ci sur la deuxième roue, on fait rouler le même corps générateur, mais cette fois à l'intérieur du deuxième cercle de base (voir Figure 1.21).

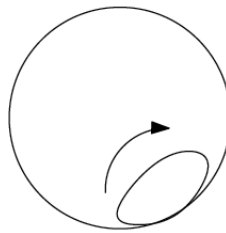


Figure 1.21: Illustration de la méthode des roulettes, génération du profil conjugué de la roue 2

Si le premier corps générateur choisi est un autre cercle, on génère des profils dits cycloïdaux. On peut étendre ce principe à la troisième dimension. Cette méthode est décrite par Henriot [5], et on peut, ainsi, générer les profils 3D comme les engrenages hélicoïdaux (Figure 1.2). On illustre cette méthode à la Figure 1.22.

« Soit les deux cylindres primitifs, d'axes X_1 et X_2 , tangents le long de la génératrice Δ . Considérons une surface cylindrique P tangente aux deux cylindres primitifs suivant Δ , et une surface N qui lui est invariablement liée. Si nous faisons rouler sans glisser la surface P sur les deux cylindres primitifs (ces trois surfaces étant constamment tangentes suivant Δ), la surface N a pour enveloppes deux surfaces S_1 et S_2 liées respectivement à chacun des deux cylindres primitifs et qui sont des surfaces conjuguées. »([5], pp 38-39)

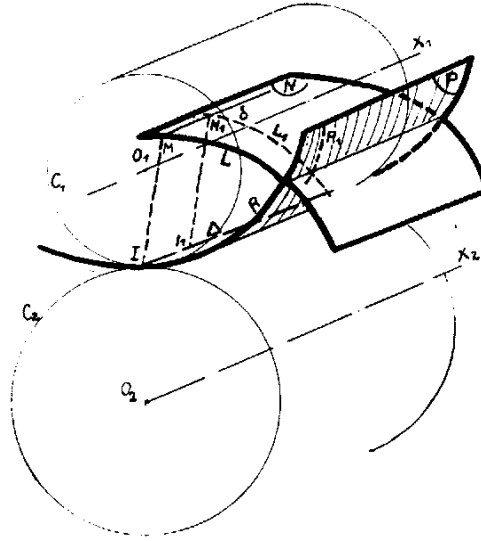


Figure 1.22: Méthode des roulettes 3D (source : [5])

Cette technique est aussi parfois appelée le *théorème de Camus* (cf. [3]). On tient toutefois à préciser que ce théorème a été énoncé il y a plusieurs siècles *uniquement* pour des cercles générateurs. Dans ce texte la notion de *théorème de Camus* restera donc liée uniquement à ce cas particulier, ainsi qu'aux cas décrivant des corps roulant sur un cercle. On préférera la notion de *méthode des roulettes* pour le cas général, c'est-à-dire où ni la base ni la roulante ne sont nécessairement des cercles. La formulation et la preuve du théorème de Camus sont présentées en détail à l'Annexe A.

Certains profils de denture ne peuvent pas être générés par la méthode des roulettes. C'est le cas en particulier du profil Wildhaber-Novikov, tandis que le profil à développante de cercle exige une adaptation de la méthode (cf. [5]).

1.6.3 Génération des profils conjugués cinématiquement par la géométrie différentielle

1.6.3.1 Définition du problème

Soit deux corps en rotation autour d'axes quelconques avec des angles de rotations ϕ_1 et ϕ_2 , ainsi qu'une loi de mouvement m_{21} qui lie ces deux angles.

Si la surface r_1 du premier corps est connue, quelle doit être la surface r_2 du deuxième corps pour que la loi de mouvement m_{21} soit respectée.

Deux approches apparentées et toutes deux basées sur la théorie des enveloppes¹ permettent de résoudre ce problème : la théorie classique et la théorie dite compacte. Le théorème d'Euler-Savary, le théorème de Lewis et la loi de Willis permettent aussi d'aborder ce problème dans certains cas particuliers et seront utilisés dans nos développements. Nous les présentons donc aussi ci-après (§1.6.3.4 et §1.6.3.5)

¹ La définition d'une enveloppe d'une famille de courbes est donnée au §4.2.2 et reliée à la théorie classique des profils conjugués

1.6.3.2 Théorie classique

Cet élément de théorie est largement discuté au §4.2. On laisse le soin au lecteur de se référer à ce paragraphe.

On précise pour la suite de la lecture que les équations utilisées, tant dans la théorie classique que la théorie compacte, sont tirées de la théorie des enveloppes, et qu'elles permettent de résoudre le problème proposé au § précédent.

1.6.3.3 Théorie « compacte » [16]

Cette version de la théorie d'analyse des profils conjugués se base sur les mêmes principes que ceux présentés au §4.2, mais elle se veut plus simple dans les calculs. La particularité est d'éliminer volontairement les changements explicites de repères en imposant que ces changements de repères se fassent dans les équations elles-mêmes, en utilisant uniquement les angles de rotation. La théorie compacte reste néanmoins basée sur la méthode des enveloppes mais peut s'avérer jusqu'à 200 fois plus rapide dans les calculs numériques que la version « standard » selon l'article [16].

Pour réaliser cette performance, Di Puccio et ses coauteurs [16], utilisent une autre façon pour représenter la rotation d'un vecteur position :

$$\hat{\mathbf{r}} = R(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \alpha) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] \cos(\alpha) + \mathbf{a} \times \mathbf{r} \sin(\alpha)$$

Équation 1.9

Avec :

- $\hat{\mathbf{r}}$ le vecteur position qui a subit la rotation
- \mathbf{r} le vecteur position qui va subir la rotation
- \mathbf{a} un vecteur unitaire qui marque l'axe et le sens de la rotation
- α l'angle de rotation autour de l'axe \mathbf{a} .
- R l'opérateur rotation

Cette façon de représenter les rotations permet de se passer des matrices de transformation.

Ces vecteurs ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R(R(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \alpha), \mathbf{a}, -\alpha) \\ \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{v}} &= R(\mathbf{r} + \mathbf{v}, \mathbf{a}, \alpha) \\ \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}} &= R(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{a}, \alpha) \\ \hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}}) &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Équation 1.10

Avec \mathbf{v} et \mathbf{w} deux vecteurs quelconques.

Ces propriétés vont jouer un rôle important dans la simplification des équations d'enveloppe (équations discutées au §4.2.)

Les dérivées de ces vecteurs par rapport aux paramètres permettant de décrire l'enveloppe sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{r}}(u, \theta, \alpha(\phi)) &= R \left(\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{r}(u, \theta), \mathbf{a}, \alpha(\phi) \right) \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}}(u, \theta, \alpha(\phi)) &= \frac{d\alpha}{d\phi} \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}(u, \theta, \alpha(\phi))\end{aligned}$$

Équation 1.11

Avec

\mathbf{r} un vecteur position représentant une surface paramétrée par u et θ .

Pour écrire l'enveloppe, nous avons maintenant besoin du rapport de transmission, ainsi que de la disposition des axes de rotation des roues et de l'entraxe. On utilise donc \mathbf{a} comme axe de la première roue d'engrenage, \mathbf{b} comme axe de la deuxième roue. Pour cette version de la famille de courbes (\mathbf{r}_c) il est nécessaire d'utiliser une représentation vectorielle de l'entraxe, que nous noterons \mathbf{E} . Ce qui nous amène à :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_c(u, \theta, \phi_1) &= R(\hat{\mathbf{r}}_2(u, \theta, \phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2) = R(\hat{\mathbf{r}}_1(u, \theta, \phi_1) - \mathbf{E}(\phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2) \\ &= R(R(\hat{\mathbf{r}}_1(u, \theta), \mathbf{a}, \phi_1) - \mathbf{E}(\phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2)\end{aligned}$$

Équation 1.12

Les auteurs de la « théorie compacte » définissent ensuite une grandeur un peu particulière :

$$\mathbf{w}(\phi_1) = \mathbf{a} - \frac{d\phi_2}{d\phi_1} \mathbf{b}$$

Équation 1.13

Ils utilisent aussi la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}(u, \theta, \phi_1) &= \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}_1(u, \theta, \phi_1) - \frac{d\phi_2}{d\phi_1} \times \hat{\mathbf{r}}_2(u, \theta, \phi_1) - \frac{d}{d\phi_1} \mathbf{E}(\phi_1) \\ &= \left(\mathbf{a} - \frac{d\phi_2}{d\phi_1} \mathbf{b} \right) \times \hat{\mathbf{r}}_1(u, \theta, \phi_1) + \frac{d\phi_2}{d\phi_1} \mathbf{b} \times \mathbf{E}(\phi_1) - \frac{d}{d\phi_1} \mathbf{E}(\phi_1) \\ &= \mathbf{w}(\phi_1) \times \hat{\mathbf{r}}_1(u, \theta, \phi_1) + \frac{d\phi_2}{d\phi_1} \mathbf{b} \times \mathbf{E}(\phi_1) - \frac{d}{d\phi_1} \mathbf{E}(\phi_1)\end{aligned}$$

Équation 1.14

dans le but d'écrire une version simplifiée d'une dérivée de l'Équation 1.12, soit

$$\frac{d}{d\phi_1} \mathbf{r}_c(u, \theta, \phi_1) = R(\hat{\mathbf{h}}(u, \theta, \phi_1), \mathbf{a}, -\phi_2)$$

Équation 1.15

Les autres dérivées de l'Équation 1.12, une fois mises en relation avec les propriétés présentées à l'Équation 1.10 donnent les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \mathbf{r}_c(u, \theta, \phi_1) &= R\left(\frac{d}{du} \hat{\mathbf{r}}_2(u, \theta, \phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2\right) = R\left(R\left(\frac{d}{du} \mathbf{r}_1(u, \theta), \mathbf{a}, \phi_1\right), \mathbf{b}, -\phi_2\right) \\ \frac{d}{d\theta} \mathbf{r}_c(u, \theta, \phi_1) &= R\left(\frac{d}{d\theta} \hat{\mathbf{r}}_2(u, \theta, \phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2\right) = R\left(R\left(\frac{d}{d\theta} \mathbf{r}_1(u, \theta), \mathbf{a}, \phi_1\right), \mathbf{b}, -\phi_2\right) \end{aligned}$$

Équation 1.16

Une autre fonction vectorielle est exprimée à partir de l'Équation 1.12 :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_e(u, \theta, \phi_1) &= R(\hat{\mathbf{h}}(u, \theta, \phi_1), \mathbf{b}, -\phi_2) = \\ &= R(\mathbf{w}(\phi_1), \mathbf{a}, -\phi_2) \times \mathbf{r}_1(u, \theta) + R\left(\frac{d\phi_2}{d\phi_1} \mathbf{b} \times \mathbf{E}(\phi_1) - \frac{d}{d\phi_1} \mathbf{E}(\phi_1), \mathbf{a}, -\phi_2\right) \\ &= \mathbf{w}_e(\phi_1) \times \mathbf{r}_1(u, \theta) \times \mathbf{q}_e(\phi_1) \end{aligned}$$

Équation 1.17

On peut maintenant écrire l'équation de l'enveloppe (voir également §4.2.) grâce aux relations présentées de l'Équation 1.12 à l'Équation 1.17 :

$$\begin{aligned} f(u, \theta, \phi_1) &= \left[R\left(\frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{r}}_2, \mathbf{b}, -\phi_2\right); R\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}}_2, \mathbf{b}, -\phi_2\right); R(\hat{\mathbf{h}}, \mathbf{b}, -\phi_2) \right] = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{r}}_2; \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}}_2; \hat{\mathbf{h}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{r}}_1; \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}}_1; \hat{\mathbf{h}} \right] = \hat{\mathbf{n}}(u, \theta, \phi_1) \cdot \hat{\mathbf{h}}(u, \theta, \phi_1) = \\ &= \left[R\left(\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{r}_1, \mathbf{b}, \phi_1\right); R\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}_1, \mathbf{b}, \phi_1\right); R(\mathbf{h}, \mathbf{b}, \phi_1) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{r}_1; \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}_1; \mathbf{h} \right] = \\ &= \mathbf{n}(u, \theta) \cdot \mathbf{h}(u, \theta, \phi_1) = 0 \end{aligned}$$

Équation 1.18

Avec $\mathbf{n}(u, \theta)$ la normale au profil.

L'Équation 1.18 a ceci de remarquable qu'elle ne contient pas directement les changements de repères et permet ainsi de gagner des étapes de calculs. On note également que cette forme de l'équation ne contient l'angle de rotation que dans l'un des deux vecteurs, et ce, quelle que soit la surface, ce qui est aussi avantageux d'un point de vue rapidité de calcul.

Cette approche « compacte » sans changements de repères explicites peut également être étendue à l'étude des courbures. Elle a été testée sur un engrènement hyperboloïde en effectuant le même calcul que l'approche « classique » ce qui a été fait 200 fois plus rapidement selon Di Puccio et ses coauteurs dans leur article [16].

1.6.3.4 Formule d'Euler-Savary [7]

La formule d'Euler-Savary est une équation simple, valable pour les engrènements, et qui permet de déterminer rapidement certaines informations importantes sans passer par de longs calculs compliqués.

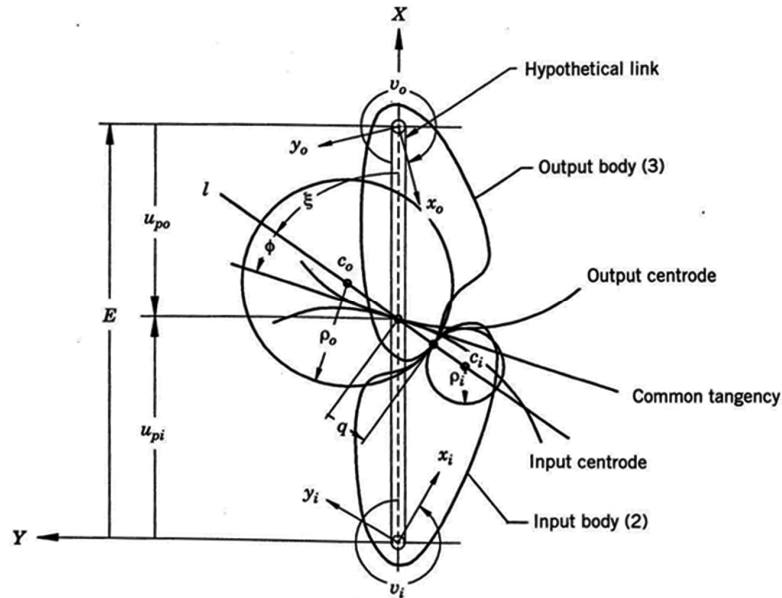


Figure 1.23: Nomenclature pour la dérivation de l'équation d'Euler-Savary (tiré de[7])

L'équation, pour le cas d'un engrènement plan à rapport de transmission constant, est la suivante :

$$\frac{1}{\rho_i + q} + \frac{1}{\rho_o - q} = \left(\frac{1}{u_{pi}} + \frac{1}{u_{po}} \right) \frac{1}{\sin \phi}$$

Équation 1.19

Avec :

- ρ_i : le rayon de courbure du corps i
- ρ_o : le rayon de courbure du corps o
- q : la distance entre le point de contact c et le pôle p
- u_{pi} : la distance entre le pôle et le centre de rotation du corps i . Cette valeur est aussi celle du rayon du cercle primitif du corps i
- u_{po} : analogue à u_{pi} mais pour le corps o .
- ϕ : l'angle de pression.

L'Équation 1.19 est déduite des propriétés des vitesses. La vitesse au pôle p s'écrit:

$$\mathbf{v}_{pi} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{pi}$$

Équation 1.20

avec $\boldsymbol{\omega}_i$ la vitesse de rotation du corps i , et \mathbf{r}_{pi} la position du point p dans le référentiel fixe.

La vitesse \mathbf{v}_{pi} peut être décomposée en deux parties, l'une projetée sur la ligne droite l , la normale au point de contact (voir Figure 1.23), et l'autre perpendiculaire à l :

$$\|\mathbf{v}_{pi\perp}\| = \omega_i u_{pi} \cos \xi$$

Équation 1.21

Si l'on recherche maintenant la vitesse angulaire de la ligne l autour du point c_i (centre de courbure), on peut écrire :

$$\omega_l = \frac{\|\mathbf{v}_{pi\perp}\|}{\rho_i + q}$$

Équation 1.22

Si l'on écrit la composante perpendiculaire à l de la vitesse \mathbf{v}_{ci} (vitesse du point c du corps i) en utilisant l'Équation 1.22 on obtient :

$$\|\mathbf{v}_{ci\perp}\| = \frac{\rho_i}{\rho_i + q} \omega_i u_{pi} \cos \xi$$

Équation 1.23

En exprimant la vitesse ω_l en termes des variables du corps 0, on obtient, similairement à l'Équation 1.22 :

$$\omega_l = \frac{\|\mathbf{v}_{p0\perp}\|}{\rho_0 - q}$$

Équation 1.24

et finalement :

$$\|\mathbf{v}_{c0\perp}\| = \frac{\rho_0}{\rho_0 - q} \omega_0 u_{p0} \cos \xi$$

Équation 1.25

Les vitesses \mathbf{v}_{c0} et \mathbf{v}_{ci} (et leurs composantes perpendiculaires) sont liées par l'équation :

$$\mathbf{v}_{ci} = \mathbf{v}_{c0} + \mathbf{v}_{0i}$$

Équation 1.26

avec \mathbf{v}_{0i} la vitesse de glissement, dénoté \mathbf{v}_{12} dans les autres paragraphes.

Cette vitesse de glissement peut être écrite :

$$\|\mathbf{v}_{oi\perp}\| = -\omega_i(1 + m_{oi})q$$

Équation 1.27

avec m_{oi} le rapport de transmission instantané. En substituant l'Équation 1.22, l'Équation 1.25 et l'Équation 1.27 dans l'Équation 1.26, on obtient :

$$\frac{1}{\rho_i + q} + \frac{1}{\rho_o - q} = \left(\frac{1}{u_{pi}} + \frac{1}{u_{p0}} \right) \frac{1}{\cos \xi}$$

Équation 1.28

Si l'on considère maintenant une transmission à rapport de vitesse constant, alors ξ et ϕ sont des angles complémentaires, on peut alors écrire l'Équation 1.19. Si par contre ce n'est pas le cas, la droite l ne passe alors pas par le pôle, et les angles n'ont rien de remarquable entre eux.

L'équation d'Euler-Savary est une alternative rapide et efficace pour le calcul des rayons de courbure. Elle est aussi une évocation d'une propriété des plus utiles pour les engrenages plans, le fait que la normale aux surfaces au point de contact doit être orientée vers le point de tangence des cercles primitifs, donc le pôle.

1.6.3.5 Théorème de Lewis, Loi de Willis [6, 17]

Le théorème de Lewis, aussi appelé Loi de Willis, est un théorème fondamental de l'engrènement des engrenages. Il énonce qu'une paire de profils conjugués doivent avoir une forme telle que lorsqu'ils sont en contact, la normale commune (\mathbf{n}) aux profils au point de contact intersecte la ligne des centres et la divise en deux segments r_1 et r_2 (voir : Figure 1.24) qui sont dans le rapport :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = m_{21}$$

Équation 1.29

avec $r_1 + r_2 = E$

En exprimant la condition 1.29 en s'appuyant sur la Figure 1.24, on obtient :

$$\frac{c_x - r_x}{n_x} = \frac{c_y - r_y}{n_y}$$

Équation 1.30

$n_{x,y}$ étant les composantes du vecteur normal \mathbf{n} aux profils au point de contact.

L'Équation 1.30 associée à l'Équation 1.29 permet le calcul de profils conjugués plans ou à axes concourants. Elle donne également un sens graphique à l'orientation de la normale, tout en permettant des calculs simples et rapides pour les profils plans.

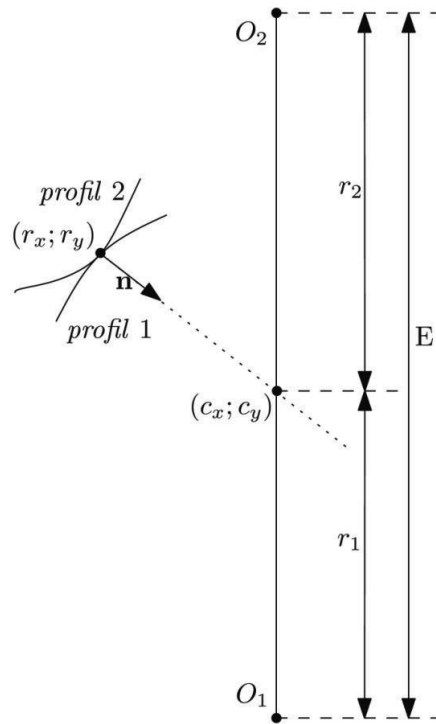


Figure 1.24 : Illustration du théorème de Lewis

1.6.3.6 Les trois lois de l'engrènement [4, 7]

Dooner [4, 7] propose l'organisation de la théorie des engrenages en trois lois distinctes. Il en a écrit deux formes différentes, bien qu'équivalentes.

1ère loi

La première loi de Dooner donne la description de ce qu'est un profil conjugué.

« For any given axes and transmission function a unique relationship exists between the instantaneous displacement of the output and the instantaneous displacement of the input »²

« For any given axes, the contact normal must be reciprocal to instantaneous twist in order to achieve the desired instantaneous gear ratio »³

On peut voir que la première loi s'est sensiblement modifiée avec les années. La principale différence se trouve dans les propriétés mises en avant pour décrire cette loi. La première formulation fait appel à des notions courantes comme le déplacement instantané pour décrire ce qui est en fait une définition d'un profil conjugué (voir §1.6.1). La deuxième formulation fait par contre appel à la notion d'« instantaneous twist » qui est une notion introduite par Dooner dans ses ouvrages. Cette notion représente en fait l'axe instantané de rotation, mais est représenté sous la forme d'une vis (« screw »), une façon de représenter les courbes qui, selon Dooner, est pratique pour la représentation des engrenages hélicoïdaux et hyperboloïdes. Cette forme de représentation possède sa propre algèbre, dont fait partie la « reciprocity condition ». Cette condition est un peu particulière et représente une sorte de « produit scalaire » des vis. Elle stipule que la normale

² Tiré de 7. Dooner, D.B. and A.A. Seireg, <<The>> kinematic geometry of gearing a concurrent engineering approach. 1995, New York [etc.]: Wiley. XV, 450 S.

³ Tiré de: 4. Dooner, D.B., On the Three Laws of Gearing. Journal of Mechanical Design, 2002. 124(4): p. 733-744.

au contact doit passer par le « instantaneous twist », donc que l'axe de rotation instantané a un point commun avec la normale au contact.

Cette condition correspond, dans le cas d'un engrenage plan avec un rapport de transmission constant, à la loi d'engrènement proposée par Euler. Cette dernière demande que la normale commune aux dents de l'engrenage (la normale aux surfaces au point de contact) intersecte la ligne des centres en un point fixe, afin de garantir un rapport de transmission constant. Ce point, appelé pôle, est le centre instantané de rotation d'un engrènement plan. On rejoint avec cette formulation la définition proposée dans la loi de Dooner.

2ème loi

« For any given axes, a unique relationship exists between apparent radii of the hyperboloidal pitch surfaces and the instantaneous gear ratio in order for two gear teeth to provide conjugate motion transmission for any pressure angle »⁴

Cette loi fait appel à la notion d'angle de pression ainsi qu'à l'angle de la spirale (qui n'a rien à voir avec l'angle hélicoïdal des engrenages standards). Cette loi statue qu'il n'existe qu'une seule relation directe entre l'angle de la spirale et le rapport de transmission pour que n'importe quel angle de pression puisse être solution. Cette information, bien que pertinente, n'est pas d'une grande utilité pour les engrenages non-hyperboloïdes, ce qui est le cas pour les engrenages d'horlogerie.

3ème loi

« For any two generally disposed axes, a unique relation exists for the relative curvature between two gear surfaces in mesh that is independent of the gear tooth geometries »⁵

Cette loi est le pendant spatial de l'équation d'Euler-Savary (§ 1.6.3.4). Elle est plutôt une observation générale et une conclusion pratique pour les calculs des engrenages, encore une fois hyperboloïdes. Malgré tout, cette loi pourrait devenir intéressante s'il s'avérait avantageux d'utiliser des engrenages hyperboloïdes en horlogerie. Pour l'instant la loi d'Euler-Savary pour le cas plan est suffisante pour les analyses et simulations que nous allons entreprendre.

1.6.4 Génération par segments de développante [18]

La technique développée par Spitas et al. [18] permet de calculer (de manière numérique) les profils conjugués en approximant les profils par des segments de développantes plutôt que par des segments de droite ou de cercle. Cette technique s'applique aussi à des engrenages autres que ceux à profil de développante. Elle apporte un gain de vitesse de calcul annoncé jusqu'à un facteur 6 par rapport à la méthode dite « conventionnelle » et utilisée par Litvin dans ses articles [6, 19-21] et ouvrages.

Bien qu'intéressante si l'on traite de l'optimisation de problèmes complexes car le gain de temps n'est pas négligeable, cette technique ne révolutionne pas la résolution du problème de la génération des engrenages tel qu'il est exposé au Chapitre 4.

⁴ Tiré de :4. Ibid.

⁵ Tiré de :4. Ibid.

1.6.5 Contact géométrique : formulation

On souhaite pouvoir déterminer la cinématique d'un ensemble pignon-roue à partir de leurs profils de denture. On suppose donc comme connu les profils des dents du pignon et de la roue, ainsi que l'entraxe E , et deux angles β et ψ . Ces trois paramètres décrivent le positionnement relatif des deux axes de rotation. On utilise trois repères différents, S_1 , S_2 et S_f . On lie l'origine et l'axe z des repères S_1 et S_f . Ces termes ainsi que la disposition des repères sont illustrés à la Figure 1.25.

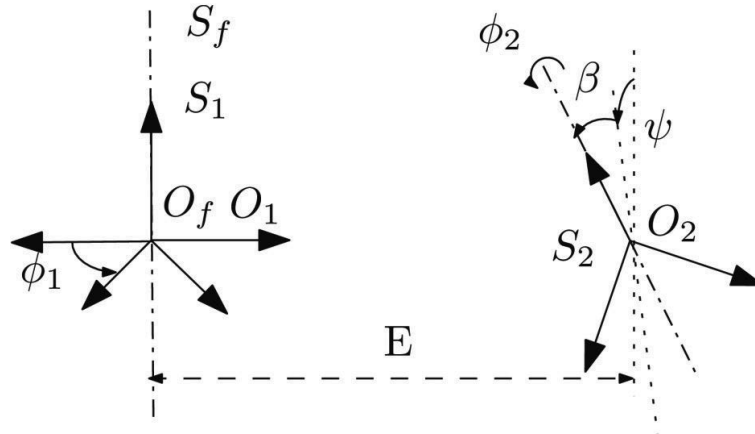


Figure 1.25: Illustration des repères utilisés pour la formulation du contact géométrique

On a comme données de départ les profils :

$r_1(u, \theta)$ et $r_2(v, \gamma)$ qui sont connus (ils ne sont pas forcément conjugués, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas leur comportement), ainsi que les matrices de passage : $M_{f1}(\phi_1)$, $M_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi)$ et leurs inverses.

On veut déterminer $\phi_2(\phi_1)$, étant donné E , β , ψ .

On étudie le problème dans le repère fixe f .

Pour déterminer $\phi_2(\phi_1)$, il faut déterminer le point de contact des deux dents pour chaque angle d'entrée ϕ_1 .

Il existe plusieurs façons de déterminer le point de contact, que nous présentons ci-dessous. La liste tente d'être la plus exhaustive possible.

1.6.5.1 Formulation géométrique utilisée dans certains logiciels horlogers

Cette formulation se base strictement sur la géométrie classique. On utilise le fait qu'une part non-négligeable des profils horlogers sont décrits par des arcs de cercles et des segments de droite. Dès lors le nombre de types de contacts différents se limite à 3. On peut donc écrire les solutions analytiques de ces contacts, et ainsi résoudre les problèmes en variant uniquement les paramètres. Il s'agit toutefois de s'assurer que le contact calculé se fait bien au point considéré, et pas sur une autre section du profil.

Pour les profils générés par crémaillère, on ne peut plus se contenter des trois cas précédents. Les profils sont alors décrits comme une liste de points à laquelle est associée une liste des normales au profil. Cette liste est calculée à partir de la crémaillère et de la cinématique d'engrènement. On peut alors calculer le contact, ce qui est fait de manière numérique dans les logiciels utilisant cette approche. Dans le cas de la

génération du profil par la crémaillère de taillage, il s'agit de faire attention au point de rebroussement lors de taillage de pignon où il y a interférences.

1.6.5.2 Contact géométrique : Résolution du problème

Dans la littérature, une fois les équations formulées, le problème de la détermination du point de contact est considéré comme résolu théoriquement. Il n'est malheureusement pratiquement jamais fait mention des techniques utilisées pour le résoudre pratiquement, que ce soit la technique utilisée pour représenter les profils, ou les algorithmes employés pour déterminer numériquement les points de contact.

Toutefois, malgré la simplicité apparente du problème, les surfaces sont parfois très complexes, comme par exemple dans les engrenages hyperboloïdes. Dans ces cas, les surfaces sont parfois approximées par des splines plutôt que d'utiliser la définition mathématique des courbes réelles (cf. [22]).

1.7 Particularités des trains d'engrenages de l'horlogerie

1.7.1 Généralités

L'horlogerie est une discipline très ancienne (première horloge mécanique européenne construite au Xème siècle) qui a su créer des horloges relativement précises bien avant que les théories présentées dans ce chapitre ne soient développées. Les horlogers ont su inventer et mettre en place souvent de manière empirique tout ce dont ils avaient besoin pour faire fonctionner leurs mécanismes. Ce savoir empirique a été transmis jusqu'à nos jours. Cependant, depuis environ un siècle, l'industrialisation a rattrapé l'horlogerie, et après la modification drastique des méthodes de production, l'attention se porte maintenant sur les détails fonctionnels des composants. Après avoir été si longtemps un métier d'artisan, l'horlogerie s'est rapprochée de la science et s'est peu à peu transformée en une branche de l'ingénierie scientifique. Cependant, bien qu'elle eût pu bénéficier de tous les développements faits sur les engrenages de mécanique traditionnelle, l'horlogerie s'en est tenue à l'écart à cause de l'utilisation particulière qu'elle fait de ces organes de transmission, et a donc développé ses propres profils.

Dans ce qui suit, nous présentons rapidement le rôle des engrenages dans la montre. Dans la montre mécanique « classique » (sans quantième, ni complications), on dénombre huit éléments principaux incluant six chaînes cinématiques, dont quatre sont composées, au moins en partie, d'engrenages :

1. Ressort moteur (barillet)
2. Rouages
3. Echappement
4. Organe réglant (oscillateur)
5. Remontage manuel
6. Automate
7. Affichage
8. Mise à l'heure

Les deux derniers mécanismes sont nécessaires, mais ne font pas vraiment partie du mouvement. Les quatre premiers, sans entrer dans les détails, ont pour fonction d'effectuer respectivement, la réserve d'énergie, la transmission/réduction de l'énergie à l'échappement, qui lui, sert à faire le lien entre l'organe réglant (qui donne la pulsation) et les autres mécanismes. La Figure 1.26 montre les liens entre les différents mécanismes.

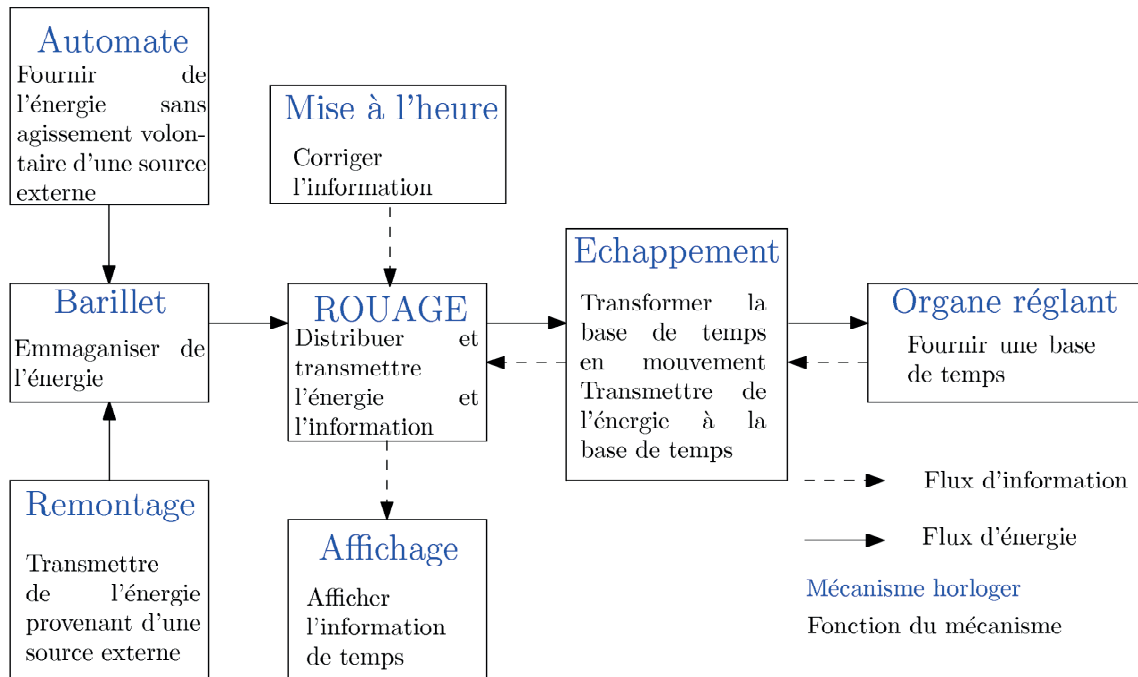


Figure 1.26: Schéma fonctionnel et flux entre les mécanismes d'une montre mécanique

La Figure 1.27 montre une vue éclatée d'un mouvement qui présente les quatre premiers éléments.

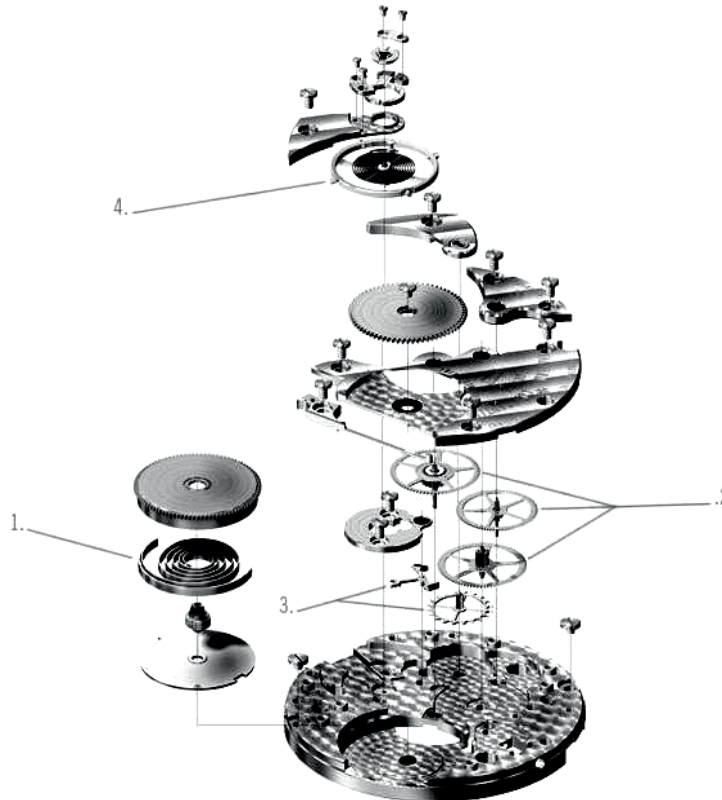


Figure 1.27: Eclaté d'un mouvement mécanique (Source : [23])

Le détail du rouage est présenté en Figure 1.28. On distingue les quatre mobiles habituels, un mobile étant l'ensemble d'une roue et d'un pignon fixé sur le même axe. Ils sont nommés :

1. Roue de centre
2. Roue de moyenne
3. Roue de seconde
4. Pignon d'échappement

La roue d'échappement que l'on aperçoit également fait déjà partie de l'échappement.

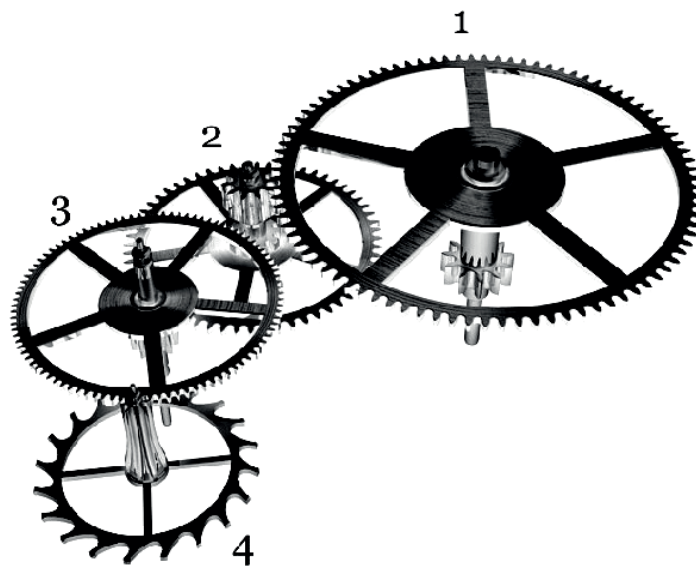


Figure 1.28: Rouage de mouvement (source :[23])

1.7.2 Profils utilisés en horlogerie

Les divers profils utilisés dans les entreprises horlogères peuvent être très différents les uns des autres. Ces différences sont dues notamment au sens de transmission de l'énergie (roue menante/pignon mené ; roue menée/pignon menant), et à la fonction spécifique de chaque étage de la chaîne cinématique.

1.7.2.1 Le profil cycloïdal et son approximation le profil ogival

Le profil horloger par excellence est le profil cycloïdal. Il permet d'avoir de très grands rapports de transmission sans pour autant risquer l'interférence. Mais un profil cycloïdal peut avoir bien des visages. Il faut pour le déterminer choisir deux cercles qui généreront les courbes sur les diamètres primitifs. Pour des raisons évidentes de simplicité, les horlogers utilisent souvent ce qu'on appelle *l'engrenage épicycloïdal à flancs internes droits*.

Pour ce profil de denture, on choisit le rayon du cercle générateur comme la moitié du rayon du cercle primitif, ce qui fait que l'hypocycloïde se réduit à un diamètre. On a donc des pieds de dent qui sont des segments de droite orientés en direction du centre de la roue (ou du pignon). Puisqu'on procède de même sur le pignon et sur la roue, le profil est *entièrement* déterminé.

Toutefois, ces profils épicycloïdaux à flancs internes droits, bien qu'ayant pour pied une droite, restent souvent compliqués à fabriquer. C'est pour cette raison que les horlogers ont développé des profils dits ogivaux, qui se veulent des approximations des profils cycloïdaux. Dans les années 50, on a introduit pour les pignons 3 profils différents [14] :

1. Pour les pignons à haut nombre de dents ($z > 10$), on approxime l'épicycloïde par une *demi-circonférence*, dont le diamètre est la largeur de la dent,
2. Pour les pignons de 8,9 et 10 ailes, les arcs de circonférence ont un rayon de $2/3$ de la largeur de dent, ce qui engendre l'*ogive réduite normalisée*
3. Pour les pignons plus petits (6,7 ailes) on utilise des arcs de circonférence avec des rayons égaux à la largeur de la dent, c'est l'*ogive normalisée*

Pour l'exemple, on prend une valeur de largeur de la dent à 30.

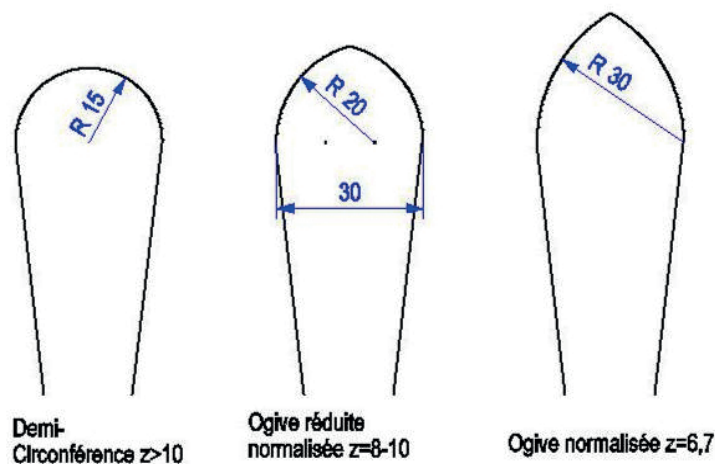


Figure 1.29: Profils de pignon normalisés (1950), dimensions arbitraires et uniquement illustratives

Même si l'idée de base n'a pas été changée lors des développements ultérieurs de ce profil, la définition des rayons des cercles ainsi que la position du centre du cercle ont depuis été adaptés. Ainsi les profils de la Figure 1.29 ne sont plus utilisés, même pour les pignons. Tout le détail de ces profils avec leur utilisation font l'objet des normes NIHS 2001, 2002, 2010, 2025.

L'horlogerie utilise aussi des jeux relativement importants (jusqu'à $1/6$ du pas) afin de garantir que les imperfections d'usinage ne provoquent pas d'interférences et de blocages du mouvement.

De plus, jusqu'à récemment, les horlogers concevaient leurs engrenages pour que le contact entre 2 dents ne survienne, autant que possible, jamais avant la *ligne des centres* (droite imaginaire passant par les centres des 2 roues en contact). Cette spécification implique que le contact sur la roue n'intervient que sur sa saillie, alors que le contact sur le pignon ne se fera que sur le pied (et vice-versa si le pignon est menant). La raison pour ce choix est la crainte de l'arc-boutement, un type de blocage associé au frottement au point de contact. Cette façon de faire n'est plus la règle.

Plusieurs considérations ont amené à la création des profils cycloïdaux. La première est d'origine fonctionnelle. Le profil cycloïdal permet de ne jamais avoir d'interférence, ce qui est un avantage énorme pour les systèmes dont les rapports de transmission sont élevés. Des considérations de fabricabilité ont amené au choix du pied droit et de la saillie approximée par des arcs de cercle. Il est en effet plus facile de fabriquer et contrôler un pied de dent droit et une saillie en arc de cercle plutôt qu'une épicycloïde réelle.

1.7.2.2 Le profil SPYR

Ce profil est le résultat d'une étude menée dans le LSRH (laboratoire suisse de recherche horlogère) [24]. Concrètement il s'agit d'un profil obtenu au moyen d'un programme de calcul et d'optimisation. Les critères d'optimisation ne sont pas donnés dans le détail. Malheureusement ce profil n'a pas donné de résultats convaincants pour les engrenements à roue menante.

1.7.2.3 Les profils GET (groupe d'étude technique)

Le GET est un groupe qui est chargé de développer de nouveaux profils pour l'horlogerie, et a déjà fourni une série de profils différents comme l'ERGET ou l'ERIGET. Malheureusement, ce groupe ne fournit pas de détails précis sur les démarches employées pour déterminer ces profils. Les profils sont donc connus, ainsi que l'utilisation pour laquelle ils sont prévus, mais sans que la démarche de conception ne soit révélée. La référence [25] montre toutefois la démarche empruntée. Comme le profil SPYR, les profils GET semblent être générés par un programme qui optimise une denture pour une application particulière.

1.7.2.4 Le profil d'engrenage à couple constant [26]

Parmi la liste des profils développés pour l'horlogerie, le profil à couple constant est le dernier proposé au moment de la rédaction de cette thèse. Sa particularité est de transmettre un couple constant en tenant compte du frottement. Il est basé sur un modèle de frottement Coulombien avec un coefficient de frottement μ . De plus, ce profil possède la propriété avantageuse que le rapport de couple ne varie pas si l'entraxe est modifié. Le profil de cet engrenage est donné par l'équation suivante :

$$\mathbf{r}(u) = R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu u)\right) - u \sin\left(\frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu u)\right) \\ \sin\left(\frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu u)\right) + u \cos\left(\frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu u)\right) \end{pmatrix}$$

Équation 1.31

avec:

R : le rayon de base de la courbe décrite par l'équation

μ : le coefficient de frottement

u : l'abscisse curviligne

La Figure 1.30 illustre la géométrie correspondante.

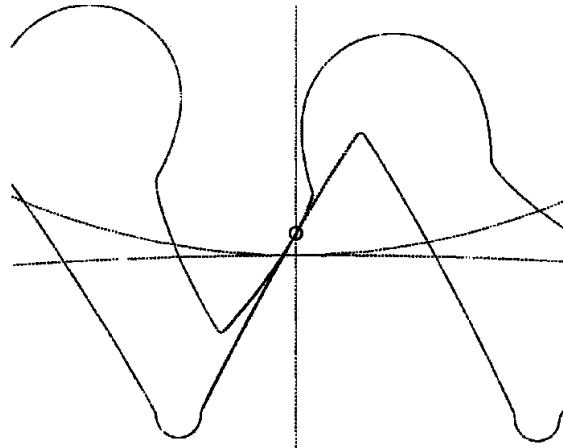


Figure 1.30: Illustration du profil à couple constant (pour $\mu = 0.2$; $z_1 = 82$; $z_2 = 12$; $\alpha = 30.5^\circ$; $\bar{\eta} = 0.966$) (tiré de [26])

Ce profil est formé, comme l'engrenage cycloïdal, de deux courbes distinctes, l'une en dessus et l'autre en dessous du diamètre primitif. Cette distinction est nécessaire puisque la force de frottement change de sens au passage de la ligne des centres. L'Équation 1.31 reste valable pour la deuxième partie du profil si on remplace μ par $-\mu$. La construction de ce profil présente certaines difficultés. Pour déterminer les différents paramètres, il faut supposer un rendement moyen afin de déterminer le point de passage de la ligne des centres, ce qui permet le calcul des diamètres primitifs. Il faut ensuite choisir un angle d'inclinaison (α) du profil au moment où le contact se fait sur la ligne des centres (position illustrée à la Figure 1.30), ce qui permettra de déterminer R . La détermination du rayon se fait également grâce au rendement moyen, qui permet de déterminer d'après l'entraxe nominal (E), quelle sera la position du point de contact par rapport aux centres des roues au moment du passage de la ligne des centres ($e_{1,2}$ selon la roue considérée ; remarque : $E = e_1 + e_2$). R est alors déterminé selon l'Équation 1.32. La palette de choix de conception est donc relativement étendue, mais il est conseillé dans le brevet de choisir un angle d'inclinaison dans l'intervalle $[10^\circ ; 30^\circ]$, ainsi qu'un rendement moyen dans l'intervalle $[0.9 ; 0.99]$.

$$R_i = e_i \cos(\alpha - \text{atan } \mu)$$

Équation 1.32

Avec i l'indice de la roue en construction.

1.7.3 Différences entre l'utilisation horlogère et l'utilisation « classique » des engrenages

Les différents profils présentés ci-dessus répondent à des exigences fonctionnelles des horlogers différentes des spécifications usuelles en mécanique traditionnelle. Les exigences spécifiques à l'horlogerie comprennent

1. L'amplification du mouvement/réduction des efforts
2. De grands rapports de transmission
3. Pas (peu ?) de lubrification
4. La nécessité d'un moment variant le moins possible en sortie du train complet (surtout pour la chaîne dite de *finissage*)
5. De faibles modules (en raison de la taille réduite du système final)

6. Des vitesses moyennes faibles, avec des pointes pouvant cependant avoisiner les 1000tr/min (il ne faut pas oublier que les chaînes horlogères sont constamment stoppées puis libérées pendant de courts instants par le mouvement de l'échappement)
7. Des efforts faibles
8. Un mouvement irrégulier dans le temps et des chocs dans certains étages de la chaîne cinématique
9. Un rapport de conduite très rarement supérieur à 1

Ces différents points conduisent à une autre particularité de l'horlogerie : le faible nombre de dents sur les pignons. (On descend jusqu'à 6 dents si besoin est.)

D'autres différences proviennent des dimensions réduites que doit occuper le mécanisme. Ainsi on rencontre en horlogerie:

1. Des paliers non-précontraints (paliers lisses donc avec jeu)
2. Un jeu d'engrènement important (jusqu'à 1/6 du pas (cf.[14]))
3. Un ordre de grandeur des erreurs important (équivalent à la hauteur des dents suivant les cas). Par exemple : un pignon d'échappement a un module de 0.0516 mm, avec une hauteur de dent d'environ 0.15 mm, et les erreurs de positionnements sont entre -0.025 et +0.040 mm)

Toutes ces différences ont donc amené les horlogers, à vouloir employer le profil cycloïdal. La forme exacte étant difficile à réaliser, une série d'approximations appelées profils ogivaux a été mise en place et normalisée [27] (cf. §1.7.2.1 et Figure 1.29). Par la suite, avec les avancées technologiques, notamment dans les capacités d'usinage, d'autres normes ont été développées, tel que le SPYR.

1.8 Erreurs affectant les engrenages d'horlogerie

Dans ce sous-chapitre, nous établissons les différents types d'erreurs pouvant exister dans les engrenages d'horlogerie et influencer leurs performances. On peut distinguer deux catégories principales d'erreurs :

1. Les erreurs d'assemblage
2. Les erreurs d'usinage

Ces erreurs proviennent d'éléments différents et nécessitent des approches de modélisations différentes.

1.8.1 Erreurs d'assemblage

Ces erreurs proviennent, comme leur nom l'indique, du procédé d'assemblage des paires de roues des engrenages. D'une manière générale, le positionnement d'un corps par rapport à un autre doit respecter un positionnement en translation, ainsi qu'en rotation. On obtient donc :

- 3 erreurs en translation
- 3 erreurs en rotation

Mais une des rotations est le mouvement de l'engrenage, donc il ne peut y avoir d'erreur directe sur cette rotation fonctionnelle. L'assemblage des roues et de leurs paliers est donc associé à cinq composantes d'erreurs.

1.8.2 Erreurs de forme

Ces erreurs proviennent de l'usinage, qui ne peut pas produire une pièce parfaite. Il en résulte donc des déviations du profil réel par rapport au profil théorique. Il est difficile de vraiment qualifier les erreurs de forme, qui vont dépendre de la méthode et du procédé de fabrication.

Le problème de la fabrication des engrenages est à lui seul un sujet extrêmement vaste, que nous n'aborderons pas ici. On précise toutefois que l'échelle de travail de l'horlogerie fait que l'ordre de grandeur des imprécisions approche facilement (voir dépasse) le dixième du module.

1.9 Modélisation des erreurs

1.9.1 Erreurs d'assemblage

La modélisation des erreurs d'assemblage est celle la plus pratiquée. Litvin en fait mention dans son livre [6] ainsi que dans ses articles. Différents auteurs traitent aussi de cette problématique [28, 29].

La modélisation des erreurs d'assemblage se fait au travers de la matrice de transformation entre les axes de rotation des roues (voir §2.3). La matrice de passage contient la position de l'engrenage par rapport au repère fixe. Il suffit, pour simuler les erreurs d'assemblage, de modifier la matrice selon ce qui est proposé à l'Équation 1.33.

$$\mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E_0, \beta, \psi, \epsilon) = \underbrace{\mathbf{M}_{f2}^1(\phi_2, E_0)}_{\text{Transformation originale}} \underbrace{\mathbf{M}_{f2}^2(\beta)}_{\text{Erreur de rotation } x} \underbrace{\mathbf{M}_{f2}^3(\psi)}_{\text{Erreur de rotation } y} \underbrace{\mathbf{M}_{f2}^4(\epsilon)}_{\text{Erreur d'entraxe}}$$

Équation 1.33

La matrice originale contient l'angle de rotation de la roue ainsi que l'entraxe. Pour prendre en compte les erreurs on modifie cette matrice de transformation, ce qui ne change rien à la façon de résoudre le problème.

Une fois les matrices d'erreur définies, on voit que le problème est parfaitement cerné et qu'il n'y a plus qu'à le résoudre pour obtenir les angles de rotation des roues dentées ainsi que la position du point de contact, ce qui permet ensuite de calculer les courbures et donc les pressions de contact pour la configuration de l'engrenage entachée d'erreurs d'assemblage.

1.9.2 Erreurs de forme

Les imprécisions de forme dues à l'usinage sont plus difficiles à modéliser. Li [28, 30], dans ses articles expose brièvement l'approche standard et son approche:

1. L'approche standard consiste à faire des déviations du profil en mettant par exemple une erreur sur le cercle primitif, l'angle de contact, l'angle de l'hélice. Ce sont finalement des erreurs « 2D »
2. L'approche de Li est de mesurer en 3D de vraies dents et d'appliquer cette forme au profil à simuler. La manière de modéliser les erreurs réelles (Splines, nuage de points ?) n'est pas décrite.

Le problème de ces erreurs est qu'elles peuvent très rapidement mener à des instabilités dans la modélisation numérique du mouvement. Si le profil avec erreurs contient des changements de signe dans sa courbure (voir Figure 1.31) il devient alors très difficile de résoudre numériquement le problème.

Nous reviendrons sur cet aspect lorsque nous proposerons une solution à la modélisation des erreurs de forme (§ 2.2.6).

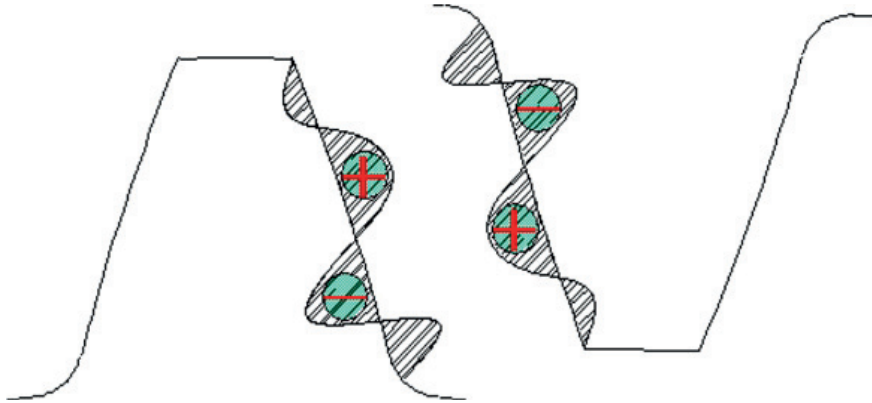


Figure 1.31: Erreurs d'usinage: courbure changeant de signe (source : [28])

1.10 Contact mécanique

Les techniques modernes pour la détermination des points de contact sont entièrement numériques. Dès lors, un couplage à un moyen numérique pour la détermination de ce qui se passe statiquement au point de contact est l'évolution naturelle de l'étude moderne des engrènements. La technique actuelle pour le calcul des contraintes de contact sous forme numérique est bien entendu la discrétisation par la méthode des éléments finis (MEF). Ainsi, dans la plupart des publications traitant de ce problème, il n'est souvent même pas fait mention d'un éventuel recours à une technique plus classique comme par exemple la théorie de Hertz. L'approche par éléments finis est celle adoptée par Litvin[6, 31] et c'est aussi celle utilisée par Li[30]. On a tout de même dans l'article [32] une mention de l'utilisation de la théorie classique avant de passer aussi à la MEF.

On remarque tout de même que la plupart des articles traitant du contact ou de l'amélioration de l'engrènement, sont guidés par les résultats analytiques de Hertz et passent par l'étude des courbures et de l'orientation de l'ellipse de contact.

1.11 Tribologie

La tribologie horlogère est un domaine très confidentiel ; les informations et les nouvelles découvertes sur ce sujet restent des secrets bien gardés. On ne peut dès lors que parler en termes très généraux du sujet.

Le comportement tribologique d'un système dépend de la structure de ce système et de son environnement fonctionnel. Parmi les nombreuses variables pouvant l'influencer, nous retiendrons :

1. L'environnement électrochimique et l'atmosphère
2. Le couple des matériaux en contact
3. La présence d'un troisième corps (film lubrifiant solide, liquide ou gazeux)
4. Le type de mouvement : roulement, glissement
5. Les vitesses des mouvements
6. La température
7. Les efforts (pressions de contact)
8. La géométrie du contact

1.11.1 Environnement électrochimique et atmosphère

La roue et le pignon d'engrenages d'horlogerie sont fabriqués d'alliages métalliques différents (généralement laiton et acier inoxydable, respectivement) ce qui en présence d'une atmosphère jouant le rôle d'un électrolyte peut amener à des phénomènes de corrosion galvanique au point de contact. Ces effets se combineront en général aux phénomènes d'usure purement mécanique.

Pour une montre, l'atmosphère peut être considérée comme de l'air ambiant, bien que la plupart des montres actuelles soient étanches, dans le but principal d'empêcher la contamination du mouvement par des poussières et autres liquides de la vie de tous les jours. Normalement, les seules « poussières » proviennent de l'usure des éléments.

1.11.2 Couple de matériaux

Dans la plupart des montres, les roues sont en laiton et engrènent sur des pignons en acier inoxydable, comme déjà indiqué ci-dessus. A part les interactions électrochimiques, le couple de matériaux interagit mécaniquement et influence le coefficient de frottement sec et le taux d'usure.

Pour la facilité d'usinage des roues, on a longtemps utilisé des laitons au plomb, mais ce type d'alliage de décolletage est en voie de disparition, pour des raisons médicales et environnementales. Souvent, on ne sait pas exactement quel laiton est utilisé ; dans certains cas il est fait mention de CuBe

Pour les pignons, on utilise des aciers inoxydables, par exemple le 20AP, qui est un acier de décolletage avec 0,2% de plomb. Là encore de nombreuses recherches sont en cours pour trouver des substituts au plomb. A noter que le plomb agit souvent comme un lubrifiant solide et peut donc affecter le coefficient de frottement et le taux d'usure.

1.11.3 Type de mouvement

Le mouvement au niveau du contact entre deux roues dentées va principalement être du glissement, avec tout de même du roulement, ce qui rend le problème tribologique compliqué.

De surcroît, le mouvement est saccadé. L'oscillateur qui régule le système ne permet la rotation que peu de temps par tour et stoppe de manière brutale l'ensemble du train d'engrènement.

1.11.4 Vitesses des mouvements

La loi de Coulomb pour le frottement est indépendante de l'amplitude de la vitesse de glissement mais dépend de sa direction. La réalité est cependant souvent plus complexe, même si cette loi est une bonne approximation lors d'utilisations courantes pour les couples de métaux mentionnés au §1.11.2. Toutefois, le problème des engrenages d'horlogerie a des vitesses de glissement qui varient beaucoup, d'une part à cause des roues dentées, (la vitesse de glissement sur les roues dentées varie continuellement), d'autre part à cause du mouvement saccadé imposé par l'oscillateur. L'utilisation de la loi de Coulomb pour modéliser la tribologie du contact horloger est donc une très grosse simplification qui s'avère cependant donner des résultats plausibles, en tous cas pour l'estimation des rendements.

1.11.5 Rendement

Le grand intérêt de la tribologie est la détermination du coefficient de frottement pour pouvoir prédire les performances énergétiques des engrenages. Il s'agit, encore à l'heure actuelle, d'un vaste domaine de recherche qui reprend une importance particulière avec les considérations écologiques. On trouve ainsi diverses études comme celles menées par Xu et Petry-Johnston de l'équipe de Kahraman (cf. [33, 34]) qui eux travaillent pour l'industrie automobile. L'utilisation de leurs travaux est d'utilité limitée pour l'horlogerie, puisqu'ils travaillent dans un domaine où le contact est lubrifié et dans des conditions de vitesses très différentes. Il faut également noter que la précision relative des engrenages d'automobile est bien supérieure à ce qui se rencontre en horlogerie, et que les rapports de transmission ne sont pas aussi importants. On précise toutefois qu'ils annoncent atteindre des rendements de 99.8% dans le meilleur cas.

1.11.6 Conclusions intermédiaires

La complexité du contact entre engrenages soumis aux conditions présentées ci-dessus peut faire l'objet de plusieurs thèses. Le sujet étant extrêmement vaste, on ne souhaite pas l'aborder plus avant, afin de ne pas perdre de vue le sujet principal de la recherche, qui est la géométrie des profils. On ne traitera donc pas du calcul du coefficient de frottement, ni de l'usure des dents. En accord avec notre partenaire et ses propres observations, on utilisera le modèle de Coulomb à coefficient de frottement constant dès qu'on parlera de frottement. On verra par la suite que les développements effectués dans ce travail permettent d'introduire des modèles de frottement plus compliqués si cela s'avérait nécessaire.

1.12 Conclusion

1.12.1 Synthèse et conclusions

Grâce à la recherche documentaire, il a été possible d'établir un état de l'art des profils d'engrenages et des techniques de génération et d'analyse de ces profils, plus spécifiquement en ce qui concerne les applications horlogères.

Après un bref historique, l'inventaire des configurations possibles puis des profils utilisés a été établi. On s'est ensuite focalisé sur les particularités de l'horlogerie et les profils développés spécialement pour l'usage dans cette industrie. Par la suite on s'est focalisé sur la théorie de la génération des profils conjugués, des techniques graphiques aux techniques de la géométrie différentielle. On a également évoqué la formule d'Euler et les trois lois de l'engrènement. On s'est aussi focalisé sur la manière dont la simulation de l'engrènement se fait actuellement. Les erreurs étant également un point important de notre étude, on a recherché des détails sur la manière de les traiter ainsi que sur leur nature. Une des principales conclusions de cette recherche documentaire est la mise en évidence de la difficulté d'obtenir des informations concernant directement l'horlogerie et ses besoins spécifiques.

Il est également possible de mettre en évidence les manques suivants :

- Peu de recherche sur les profils en eux-mêmes, la développante semblant être considérée comme la solution la plus adéquate pour la plupart des problèmes d'engrènement
- Pas de recherche publiée sur la tribologie des engrenages sans lubrification
- Pas de recherche sur l'effet d'erreurs dont l'ordre de grandeur s'approche de la valeur du module
- Peu ou pas d'information sur les méthodes numériques de solution des équations de contact pour
 - La dérivation de la loi de mouvement (analyse cinématique)
 - Le développement de profils conjugués satisfaisant des rapports de transmission variant en fonction de la position angulaire d'entrée.
 - Le développement de profils conjugués satisfaisant des conditions sur le rapport de couple et non le rapport de transmission

1.12.2 Postulat de la thèse

Afin de faciliter la conception scientifique d'engrenages pour l'horlogerie, il est nécessaire de développer des outils numériques stables et efficaces. Par conception scientifique, on entend la démarche de conception se basant sur un cahier des charges de l'engrenage quantifié dont la vérification du respect des spécifications peut se faire par des méthodes d'analyse scientifiques rigoureuses.

Les outils numériques adéquats peuvent être développés à partir de la géométrie analytique et de la théorie des enveloppes. Ils devront permettre de généraliser le concept de conjugaison cinématique classique (limité à la notion de cinématique uniforme) à des rapports de transmission variables, mais aussi à la conjugaison statique pour laquelle on imposera un rapport de couple constant ou variable, tout en tenant compte de la dissipation.

1.12.3 Objectifs spécifiques de la thèse

On se propose donc d'atteindre les objectifs suivants :

1. Analyser le fonctionnement des profils existants utilisés en horlogerie pour en déterminer les performances cinématiques et énergétiques. Utiliser ces résultats pour comparer les profils entre eux sur une base objective et rigoureuse
2. Formuler les équations nécessaires pour permettre le calcul de profils conjugués à partir de conditions différentes
3. Mettre au point une méthode de conception de profils d'engrenages

1.12.4 Approche de recherche

Afin d'atteindre nos objectifs on propose l'approche suivante :

1. Développer un programme numérique général pour analyser les profils existants permettant :
 - a. le calcul des performances des profils
 - b. l'introduction de profils très différents les uns des autres
 - c. le calcul des performances lors d'introduction d'erreurs
2. Tester le programme
3. Mettre au point des équations liant la statique, la cinématique et la géométrie des engrenages
4. Déterminer une méthode permettant la résolution de ces équations et le calcul de profils selon des critères de conjugaison différents de la cinématique
5. Confirmer expérimentalement les performances prédites par l'outil informatique (malheureusement ce point n'a pas pu être mené à son terme)
6. Valider le programme numérique en comparant ses prédictions avec des résultats analytiques connus.

Chapitre 2 Analyse des profils

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on décrit la méthode et les équations qui permettent l'analyse des profils. On débute avec la représentation des profils plans et tridimensionnels, puis on présente les équations utilisées pour analyser leurs comportements tant cinématique que statique.

2.2 Méthode de représentation des profils

La représentation des profils est une étape cruciale pour le reste du travail effectué dans cette thèse. Il faut que la représentation :

- puisse se faire en trois dimensions.
- soit la plus générique possible,
- permette aux équations utilisées pour l'analyse des profils modélisés d'être résolues rapidement et que la programmation de celle-ci soit la plus flexible possible.

2.2.1 Idée générale

L'idée à la base de la représentation des profils est de mettre en place une paramétrisation qui soit identique pour tous les profils de denture d'engrenage. Pour cela on a décidé d'utiliser, à l'instar de Litvin[6], la représentation paramétrique des surfaces. Le profil sera donc représenté comme une surface paramétrée par deux abscisses curvilignes.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u_i, v_i)$$

Équation 2.1

avec u_i et v_i les abscisses curvilignes, et x_i , y_i et z_i les coordonnées cartésiennes correspondantes.

Toutefois les courbes et surfaces utilisées pour les dentures d'engrenages sont rarement paramétrées de la même façon ce qui complique le travail de l'établissement d'un code efficace. De plus, les profils peuvent être construits à partir de plusieurs courbes ou surfaces. Pour simplifier l'analyse et la programmation des profils, on a donc reparamétrisé les courbes et surfaces qui les représentent, selon un schéma présenté dans les paragraphes suivants.

2.2.2 Paramétrisation des profils plans

On considère que les surfaces et courbes à paramétrer sont de classe C^1 .

On commence par normer le profil par son module (m). (La plupart des normes d'engrenages font cette démarche). On prendra également le soin de paramétrer le profil en fonction du nombre de dents (z).

Pour des raisons purement arbitraires, on choisit les valeurs d'abscisses curvilignes dans l'intervalle $[-2 ; 2]$ et on n'effectue la paramétrisation que sur un seul flanc, l'essentiel des cas existants étant des profils symétriques. Un autre choix arbitraire est la répartition des abscisses. La courbe formant le profil théorique (développante, cycloïde,...) sera représentée dans l'intervalle $[-1 ; 1]$, tandis que le reste de l'intervalle définit précédemment servira à la description des raccords entre les dents ou les demis profils de dent (voir Figure 2.1).

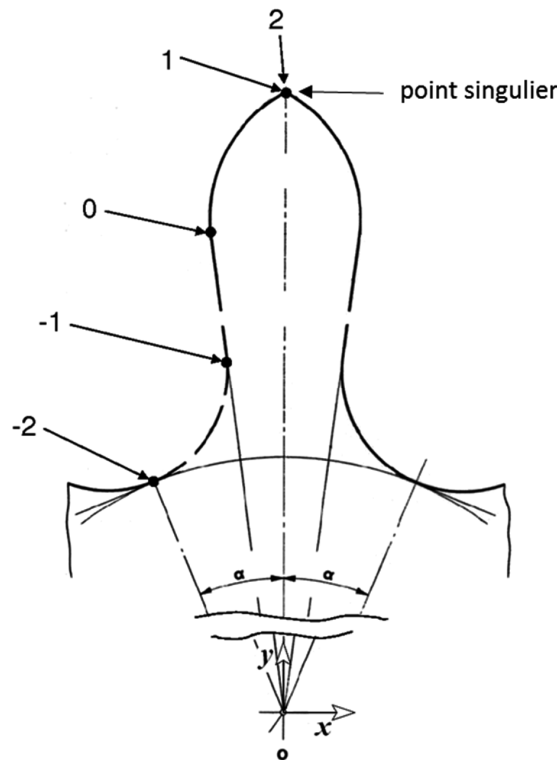


Figure 2.1: Illustration du choix des abscisses curvilignes sur un profil NIHS

Cette reparamétrisation permet de programmer les courbes en toute liberté. Il s'agira simplement de respecter les règles proposées. Elle permet également de simplifier l'analyse des résultats, puisque les différentes zones du profil sont immédiatement identifiables.

La reparamétrisation des profils plans doit respecter les règles suivantes (cf. Figure 2.1) :

1. Le système d'axe lié à la roue a une origine qui se trouve sur l'axe de rotation.
2. L'axe z est confondu avec l'axe de rotation
3. L'axe y est confondu avec l'axe de symétrie de la dent à paramétrer
4. La reparamétrisation se fait sur un seul flanc de dent (sauf si les dents ne sont pas symétriques)

5. La zone de paramètres $[-2 ; -1]$ est réservée à la représentation de la zone de pied de dent qui n'est pas sensée participer à l'imposition du mouvement, mais qui fait le lien entre les différentes dents.
6. La zone de paramètres $[1 ; 2]$ est réservée à la représentation de la zone de tête de dent qui n'est pas sensée participer à l'imposition du mouvement, mais qui fait le lien avec le second flanc de la dent.
7. La zone $[-1 ; 1]$ est réservée au flanc de dent représentant le profil à proprement parler.
8. Toutes les zones peuvent être subdivisées en autant de morceaux que nécessaire.
9. Il est souhaitable d'éviter les points singuliers. On remplacera ces points par des arcs de cercle dont le rayon sera comparativement faible (régularisation de la singularité).

Ces règles sont valables pour tous les profils, bis- ou tridimensionnels.

Si on prend pour exemple un profil NIHS (voir [35] et §1.7.2.1), principalement formé d'arcs de cercles, le profil plan $\mathbf{r}(u)$ sera alors décrit comme:

$$\mathbf{r}(u) = \begin{cases} r_f \begin{pmatrix} \cos(\alpha(u)) \\ \sin(\alpha(u)) \end{pmatrix} + \mathbf{c}_f \text{ si } u \in [-2; -1[\\ a(u) \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} + \mathbf{d} \text{ si } u \in [-1; 0[\\ r_c \begin{pmatrix} \cos(\gamma(u)) \\ \sin(\gamma(u)) \end{pmatrix} + \mathbf{c}_c \text{ si } u \in [0; 1[\\ r_t \begin{pmatrix} \cos(\psi(u)) \\ \sin(\psi(u)) \end{pmatrix} + \mathbf{c}_t \text{ si } u \in [1; 2] \end{cases}$$

Équation 2.2

avec r_f, r_c et $\mathbf{c}_f, \mathbf{c}_c$ les rayons des cercles et, respectivement, les centres des cercles, des fonds et têtes de dents tels que précisés dans la norme utilisée (les valeurs vont varier en fonction du nombre de dents, du rapport de transmission, du sens de marche et de la norme). Il en va de même pour β qui représente l'angle de la droite de flanc de dent par rapport au repère de la roue.

Le rayon r_t et le centre \mathbf{c}_t ne sont par contre pas prévus par la norme et sont ajoutés à la description du profil pour éviter les points singuliers qui sont mauvais pour la stabilité des résolutions numériques. La valeur du rayon r_t est purement arbitraire, et le centre \mathbf{c}_t sera calculé en fonction de ce rayon.

Les fonctions de u ($\alpha(u), a(u), \gamma(u), \psi(u)$) sont à calculer et à arranger pour les différents cas, et se déduisent d'un simple changement de variable linéaire.

2.2.3 Extension aux autres flancs et dents

La reparamétrisation proposée au paragraphe précédent n'est pas toujours suffisante. Il est parfois nécessaire de représenter les autres flancs ou dents présents aux côtés du flanc reparamétré. Cette extension de la représentation se fait dans la continuité de l'abscisse curviligne et alterne symétrie et décalage d'un pas.

Ainsi, le second flanc de dent se calcule à partir de la reparamétrisation du flanc en appliquant une symétrie, et les abscisses curvilignes correspondent à celles représentées à la Figure 2.2. On calcule ce flanc au moyen de l'Équation 2.3.



Équation 2.3

S'il s'agit maintenant de représenter les autres dents, on fera également appel à la représentation du flanc définie au paragraphe précédent, qu'on ramènera à la représentation d'origine avec une rotation d'un pas autour de l'axe z notée \mathbf{R}_n . On obtient alors l'Équation 2.4.

Équation 2.4

Une grande partie des profils étant plans, une description générique des flancs du profil a été élaborée. Dans les profils plans, la première coordonnée u est l'abscisse curviligne présentée à la Figure 2.1, alors que le paramètre θ est l'abscisse représentée à la Figure 2.3. La description de ces flancs doit permettre l'analyse des engrenages soumis à des erreurs d'assemblage angulaires. Dans ce cas le problème du contact n'est plus plan. Le contact des dents ne se fait plus sur les profils théoriques comme désiré, mais sur l'arête définie par l'intersection de ses profils avec le plan x-y. On nomme « flanc » la partie de la roue soumise au contact.

52

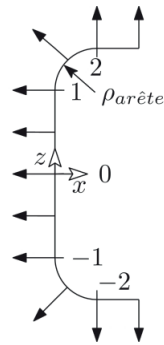


Figure 2.3: Forme normée du flanc de dent avec abscisse curviligne et normales (représentée dans le plan xz)

Pour créer une troisième dimension qui puisse s'adapter à un profil plan quelconque, le flanc de dent est représenté, par défaut, dans le plan xz. Il est ensuite positionné de manière adéquate sur le profil en utilisant les données du profil plan. Concrètement, il s'agit d'utiliser la tangente ($\frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial u}$) associée au profil plan, de calculer l'angle entre cette tangente et le plan yz, et d'utiliser cet angle (β) pour faire une rotation du flanc normé. Une représentation de la procédure est présentée à la Figure 2.4.

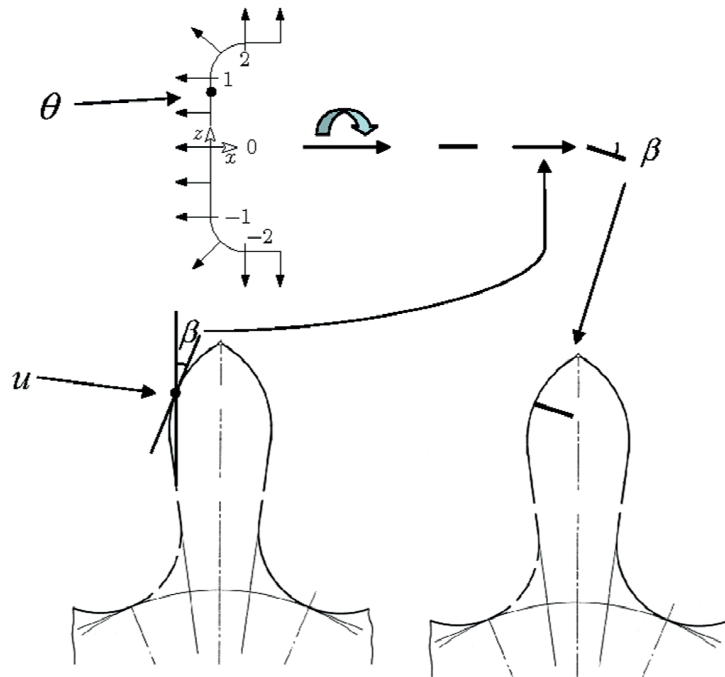


Figure 2.4: Mise en place du flanc sur le profil

Tout comme le profil plan, le flanc doit fournir deux informations: une position et une tangente. Lorsque la valeur de l'abscisse θ est comprise entre -1 et 1, la position 2D fournie par le profil plan n'est pas modifiée, et la composante z du profil est directement calculée sur une droite colinéaire à l'axe z selon l'Équation 2.5.

$$r_z = \frac{e}{2} \theta \text{ si } \theta \in [-1; 1]$$

Équation 2.5

Avec e l'épaisseur du profil. (Habituellement définie dans les normes)

Par contre, lorsque θ est en dehors de cet intervalle, le code calculant le flanc doit agir sur la position renvoyée par le calcul de profil plan. Pour cela, la normale ($\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial u} \times \hat{\mathbf{e}}_z$) au profil 2D est calculée, et on corrige la position $\mathbf{r}(u, \theta)$ selon l'Équation 2.6.

$$\mathbf{r}_{\text{corr}} = \mathbf{r} - \alpha \mathbf{n}$$

Équation 2.6

avec

- \mathbf{r} la position sur le profil bidimensionnelle
- α le scalaire à déterminer d'après θ selon l'Équation 2.7
- \mathbf{r}_{corr} la position finale, renvoyée par le code

$$\alpha = \begin{cases} \rho_{\text{arête}} \left(1 - \left| \cos \left(\left(\theta + \frac{\theta}{|\theta|} \right) \frac{\pi}{2} \right) \right| \right) & \text{si } 1 \leq |\theta| \leq 2 \\ |\theta| - 2 & \text{si } |\theta| \geq 2 \end{cases}$$

Équation 2.7

avec $\rho_{\text{arête}}$ le rayon du raccord présenté en Figure 2.3, choisit arbitrairement par l'utilisateur.

On calcule ensuite la tangente au flanc selon l'Équation 2.8.

$$\mathbf{D}_z = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_z & \text{si } -1 \leq \theta \leq 1 \\ \hat{\mathbf{e}}_x & \text{si } 2 \leq |\theta| \\ \begin{pmatrix} -\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \theta + \frac{\theta}{|\theta|} \right) \right] \\ 0 \\ \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \theta + \frac{\theta}{|\theta|} \right) \right] \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq |\theta| \leq 2 \end{cases}$$

Équation 2.8

Le vecteur \mathbf{D}_z est ensuite soumis à la rotation d'angle β selon l'Équation 2.9 pour former la tangente au profil permettant le calcul de la normale.

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial \theta} = \mathbf{R}_z(\beta) \mathbf{D}_z$$

Équation 2.9

Le calcul de la tangente est nécessaire pour pouvoir évaluer la normale au profil dont l'utilité est primordiale pour l'évaluation des performances.

2.2.5 Normale aux profils

Pour permettre le calcul des performances cinématiques et statiques, il est également important de pouvoir calculer rapidement les normales au profil. Pour cela, on lie une seconde fonction à la paramétrisation des profils présentée au paragraphe précédent. Il s'agit de calculer la normale au profil de manière analytique et de l'associer également à l'abscisse curviligne présentée plus haut. On prendra soin de la normer pour simplifier l'utilisation qu'on en fera par la suite. On s'assurera également que la direction de la normale soit dirigée vers l'extérieur de la dent (voir Figure 2.5).

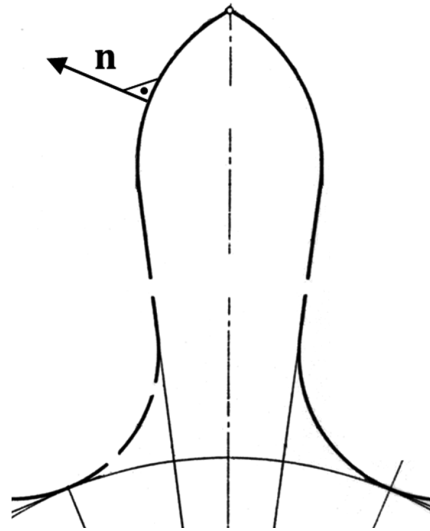


Figure 2.5 : Illustration de la normale au profil

Dans le cas plan, le calcul de cette normale se fait en dérivant le profil pour obtenir la tangente, puis en calculant la normale en faisant un produit vectoriel de la tangente avec le vecteur unitaire \hat{e}_z si la troisième dimension n'est pas utilisée. Mais d'une manière générale on calculera la normale selon l'Équation 2.10.

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, \theta)}{\partial \theta} \right\|}$$

Équation 2.10

2.2.6 Simulation des erreurs de forme (fonction f_{err})

Les erreurs de forme, qui se superposent au profil nominal de la dent, sont représentées par une fonction analytique de deux paramètres. Les erreurs sont introduites comme une déviation du profil nominal dans la direction de sa normale. Concrètement cela signifie que la position $\mathbf{r}_{1err}(u, \theta)$ est calculée comme :

$$\mathbf{r}_{1err}(u, \theta) = \mathbf{r}_1(u, \theta) + f_{1err}(u, \theta) \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial \theta} \right)}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial \theta} \right\|}$$

Équation 2.11

Avec $f_{1err}(u, \theta)$ une fonction scalaire qui représente la déviation de profil par rapport au profil nominal. Si par exemple la fonction $f_{1err}(u, \theta)$ est définie comme $f_{1err}(u, \theta) = 0.1$, alors le profil avec erreur a une surépaisseur de 0.1mm sur tout le pourtour de la dent.

Pour simplifier l'introduction de l'erreur par l'utilisateur final, on utilise comme variables les longueurs normalisées des flancs du profil. Cette façon de faire permet de mieux appréhender l'effet de la fonction mais nécessite de faire un changement de variables pour revenir aux abscisses curvilignes décrites précédemment.

Pour générer l'erreur le long de la dent tout en gardant le même code pour tous les profils, la longueur du profil est calculée numériquement pour chaque segment du profil et le changement de variable entre la longueur du segment et l'abscisse curviligne est linéarisé par segments. Ces éléments sont propres au profil et sont donc calculés pour chacun d'entre-eux.

Le détail des calculs étant intimement lié à l'implémentation de ce problème, on détaillera la fonction $f_{1err}(u, \theta)$ au §3.4.

2.3 Analyse Cinématique

2.3.1 Description du problème

L'analyse cinématique consiste en la détermination des caractéristiques cinématiques des engrenages. On souhaite permettre le calcul d'engrenages dont le comportement est inconnu, et soumis aux imprécisions d'assemblage et d'usinage présentées dans l'état de l'art. Il est donc nécessaire de mettre en place des équations acceptant tous les paramètres (listés plus bas) nécessaires à la prise en compte de ces spécifications.

On souhaite pouvoir déterminer la cinématique d'un ensemble pignon-roue à partir de leurs profils. On suppose donc comme connu les profils des dents du pignon et de la roue, ainsi que l'entraxe E , et deux angles β et ψ . Ces trois paramètres décrivent le positionnement relatif des deux axes de rotation. On utilise trois repères différents, S_1 , S_2 et S_f (voir la Figure 2.6). Les deux premiers (S_1 , S_2) sont liés aux engrenages et sont les repères dans lesquelles sont décrits les profils. Le repère S_f est lié à l'environnement et est le repère fixe.

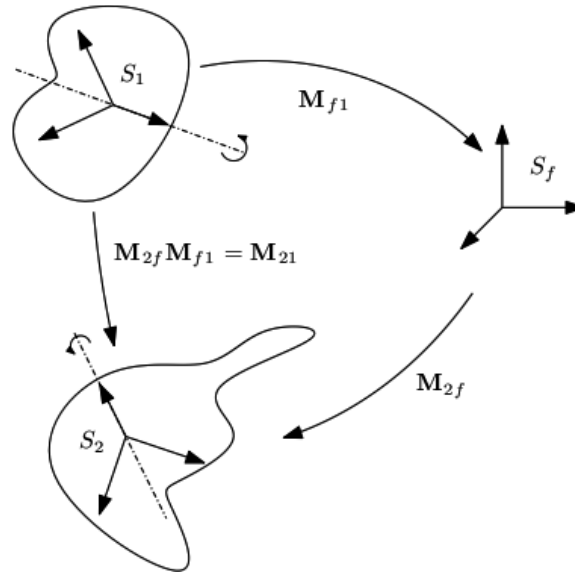


Figure 2.6 : Illustration des repères et des matrices de passage

On connaît aussi les transformations suivantes (voir Figure 2.6) :

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow S_f : \mathbf{M}_{f1} \\ S_f &\rightarrow S_2 : \mathbf{M}_{2f} \\ S_1 &\rightarrow S_2 : \mathbf{M}_{2f}\mathbf{M}_{f1} = \mathbf{M}_{21} \end{aligned}$$

qui dépendent de paramètres définissant la cinématique d'un référentiel par rapport à l'autre. On précise qu'on utilise ici une matrice de transformation 4x4 qui permet d'inclure la translation et ainsi d'alléger les notations. Dans la représentation classique d'un changement de repère on passe du vecteur $\mathbf{a}^{(j)}$ représenté dans le repère S_j au vecteur $\mathbf{a}^{(i)}$ représenté dans le repère S_i par la transformation :

$$\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{R}_{ij}\mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{t}_{ij}$$

Équation 2.12

Avec \mathbf{R}_{ij} une rotation et \mathbf{t}_{ij} une translation.

L'idée de la matrice 4x4 est d'écrire cette transformation en une seule matrice sous la forme décrite à l'Équation 2.13.

$$\mathbf{M}_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|c} \hline & & & \\ \hline & \mathbf{R}_{ij} & & \mathbf{t}_{ij} \\ & \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right)$$

Équation 2.13

Cette représentation permet d'effectuer toutes les opérations voulues et peut être inversée et multipliée sans difficultés. L'utilisation de cette matrice nécessite de rajouter une quatrième composante égale à 1 aux vecteurs. On a donc deux représentations équivalentes, présentées à l'Équation 2.14.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{ij} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{R}_{ij} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{t}_{ij}$$

Équation 2.14

Le cas utilisé dans notre problème n'est pas complètement général, et on se permet certaines simplifications :

1. On lie l'origine de S_f à celle de S_1
2. La position de S_1 est identique à celle de S_f lorsque $t=0$, et on définit l'angle de rotation $\phi_1=0$ à ce moment-là. La loi de transformation du référentiel S_1 dans le référentiel S_f \mathbf{M}_{f1} représente alors une rotation d'angle ϕ_1 .

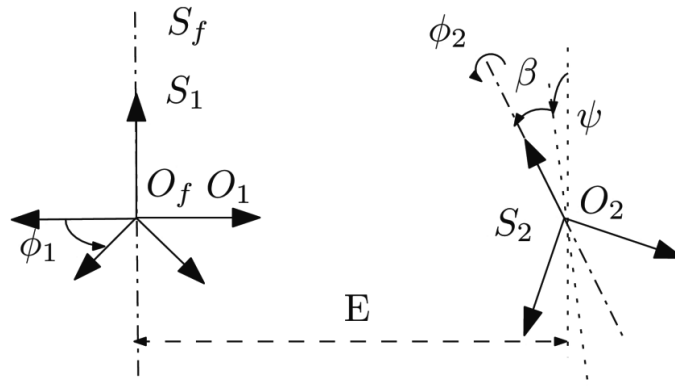


Figure 2.7 : Disposition des repères

2.3.2 Equations de contact [6, 29, 31]

On souhaite pouvoir déterminer la cinématique d'un ensemble pignon-roue dont toutes les géométries sont définies. On connaît donc les profils des dents des deux roues, ainsi que l'entraxe E , et deux angles β et ψ qui définissent la position des axes de rotation. Les erreurs de formes (f_{err}) sont également connues.

On a donc comme entrées du problème:

- $\mathbf{r}_1(u, \theta)$ et $\mathbf{r}_2(v, \gamma)$ les profils, connus. Ils ne sont pas forcément conjugués (au sens restreint du terme).
- $f_{r1,err}(u, \theta)$, $f_{r2,err}(v, \gamma)$ les fonctions « erreur de profil ».
- $\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)$; $\mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi)$ les matrices de passage et leurs inverses.

Le problème ici est la recherche de $\phi_2(\phi_1)$, étant donné $E, \beta, \psi, f_{r_{1,err}}(u, \theta)$ et $f_{r_{2,err}}(v, \gamma)$, ϕ_i représentant la rotation de la roue i ($i= 1$ ou 2).

On étudie le problème dans le repère fixe S_i (S_1 et S_2 sont solidaires des roues.)

Pour déterminer $\phi_2(\phi_1)$, on doit déterminer les conditions de contact entre les deux profils.

La première condition est l'existence d'un point commun. On écrit cette condition de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_{f_1}(\phi_1)\mathbf{r}_{1,err}(u_c, \theta_c) = \mathbf{M}_{f_2}(\phi_2, E, \beta, \psi)\mathbf{r}_{2,err}(v_c, \gamma_c)$$

Équation 2.15

Dans l'Équation 2.15, on utilise l'Équation 2.11 ($\mathbf{r}_{1,err}(u, \theta) = \mathbf{r}_1(u, \theta) + f_{1,err}(u, \theta) \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial \theta}\right)}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1(u, \theta)}{\partial \theta}\right\|}$) pour simplifier les écritures.

Ce qui représente 3 équations, avec 6 inconnues. Cette condition ne suffit donc pas, ce qui s'explique physiquement par le fait qu'elle ne fait qu'imposer un point commun aux deux profils mais ne spécifie pas de condition géométrique au contact.

On introduit donc une seconde condition, soit que les deux profils doivent être tangents au point de contact, ou de façon équivalente que leurs normales au point de contact aient la même direction. Cette seconde condition se traduit par l'équation :

$$\mathbf{M}_{f_1}(\phi_1) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1,err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1,err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right) = \lambda \mathbf{M}_{f_2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{2,err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2,err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right)$$

Équation 2.16

L'Équation 2.16 permet de modéliser le contact physique entre deux courbes *régulières*. Le problème de cette équation est λ . On doit déterminer ce paramètre, et pour cela on a une contrainte :

$$\frac{\left\| \mathbf{M}_{f_1}(\phi_1) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1,err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1,err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right) \right\|}{\left\| \mathbf{M}_{f_2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{2,err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2,err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right) \right\|} = \lambda$$

Équation 2.17

La contrainte (Équation 2.17) met en évidence que l'Équation 2.16 ne représente que 2 équations et non pas 3. Le système final est donc formé de l'ensemble d'équations (Équation 2.15 et Équation 2.16), qui représente 5 équations à 6 inconnues (l'Équation 2.17 et λ étant des contraintes). On doit donc choisir une des inconnues comme paramètre pour calculer les cinq autres, ce qui paraît logique, puisqu'un couple d'engrenage ne possède pas qu'un seul couple d'angle possible. Si c'était le cas, il ne fonctionnerait pas.

2.3.3 Déroulement de l'analyse

Le but de l'analyse est de déterminer la cinématique de profils connus dans une position donnée. L'élément principal dans le déroulement de l'analyse est de déterminer les points de contacts entre deux dents. Pour cela on s'impose une position relative des axes de rotation, c'est-à-dire que l'on fixe les valeurs de E , β , et ψ . L'angle de rotation de la roue menante (ϕ_1) est ensuite imposé comme paramètre directeur. La recherche du point de contact se fait alors en résolvant les équations présentées précédemment (Équation 2.15 à Équation 2.17). On obtient ainsi le lieu du point de contact sur les dents, ainsi que de la rotation de la deuxième roue (ϕ_2). Cette opération est répétée pour différents angles de rotation de la menante.

2.3.4 Analyse des résultats

L'analyse des résultats se fait à partir des données obtenues lors de la résolution des équations de contact. Les informations suivantes en sont déduites :

1. Le rapport de transmission instantané
2. Le début et la fin de la menée

2.3.4.1 Rapport de transmission instantané

Le rapport de transmission instantané est calculé comme le rapport de la différence des angles de rotation entre deux pas de calcul. Puisque le pas de calcul est fait par incrémentation de la rotation de la menante, on peut écrire :

$${}^i m_{21} = \frac{1}{{}^i i} = \frac{{}^i \phi_2 - {}^{i-1} \phi_2}{\Delta \phi_1}$$

Équation 2.18

avec ${}^i \phi_2$ l'angle de rotation de la menée à l'itération i , $\Delta \phi_1$ le pas de calcul, et ${}^i m_{21}$ le rapport de transmission à l'itération i , et ${}^i i$ l'inverse du rapport de transmission, qui sera utilisé lors de la génération.

2.3.4.2 Calcul du début et de la fin de la menée

Pour connaître complètement nos profils, il est nécessaire de déterminer si d'autres paires de dents sont en contact, quand une paire entre en contact et en sort, ainsi que les positions angulaires du début et de la fin de la menée.

Il s'agit de suivre une paire, que l'on appelle *paire guide*, d'imposer un certain nombre de positions à la roue menante et de calculer les points de contact de la paire guide depuis son entrée dans la zone de « contact potentiel » (voir Figure 2.8) jusqu'à sa sortie, la zone de « contact potentiel » étant la zone du plan formée par l'intersection des cercles de tête. Au mouvement de cette paire est associé le mouvement de quatre autres paires, deux devant la paire guide (paire +1 et +2), deux la suivant (paire -1 et -2).

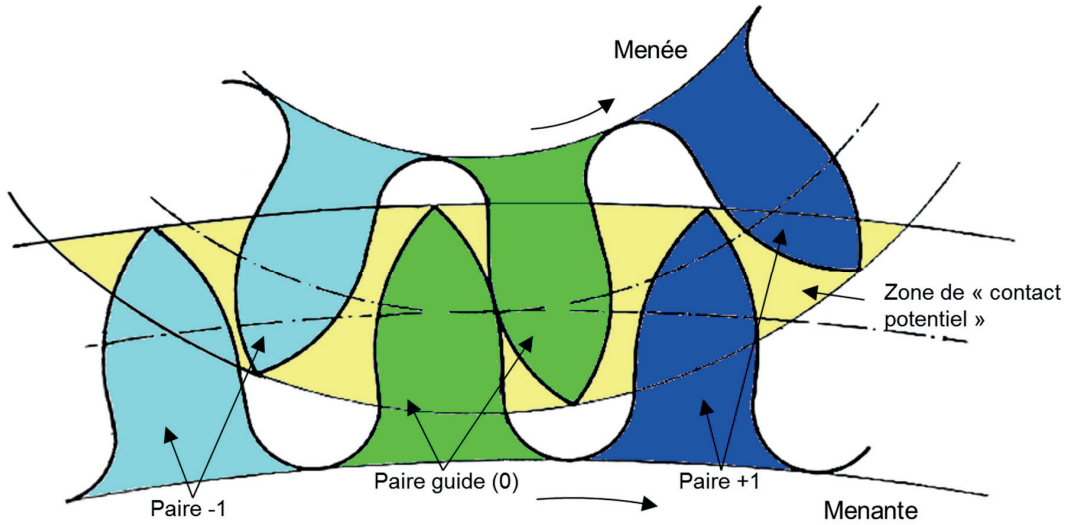


Figure 2.8: Définition des paires de dents et de la zone de "contact potentiel"

Pour chaque pas de calcul de la paire guide, on détermine quelles paires, hormis la paire guide, sont dans la zone de contact potentiel. On détermine quelle est la paire en contact en se basant sur le calcul des points de contact qui nous a permis d'obtenir les positions successives des roues. On obtient alors :

1. de 1 à 5 points de contact, un pour chaque paire dans la zone de contact
2. de 1 à 5 angles différents pour la roue menée (la position de la roue menante est imposée)

Ensuite la paire de dents qui est réellement en contact est déterminée en établissant une hiérarchie entre les différents résultats des angles. Pour que la comparaison puisse se faire, tous les angles sont ramenés au niveau de la paire guide :

$$\phi_2^{i(r)} = \phi_2^i - n^i p_2$$

Équation 2.19

avec

$\phi_2^{i(r)}$: l'angle de la menée lorsque la paire i est en contact, ramené (r) au niveau de la paire guide (paire n°0)

ϕ_2^i : l'angle de la menée lorsque la paire i est en contact

n^i : le n° de la paire i

p_2 : le pas angulaire de la menée

Après cette opération on fait un classement des $\phi_2^{i(r)}$ et on détermine lequel est le plus grand. On obtient ainsi quelle est la paire qui est en contact.

On souhaite aussi déterminer si une ou plusieurs paires de dents sont en contact. Comme la résolution des équations présentées précédemment est numérique, le résultat est entaché d'une incertitude. Même si les conditions permettent un rapport de conduite supérieur à 1, la résolution nous donnerait toujours une seule paire en contact. Afin de tout de même pouvoir identifier les contacts multiples, pour chaque résultat on joint une incertitude (un cône de tolérance) notée $^{err}\phi_2^i$. La détermination de $^{err}\phi_2^i$ se fait en analysant les résidus

des équations du contact (Équation 2.15 à Équation 2.17), et le problème mathématique concrètement résolu est celui présenté à l'Équation 2.20.

$$\left| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c) - \mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c) \right| \leq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\left| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right) \times \mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right) \right| \leq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Équation 2.20

où ε est la précision de résolution choisie.

Si nous nous intéressons plus particulièrement à l'équation vectorielle (Équation 2.16), tout en n'oubliant pas le principe de résolution présenté à l'Équation 2.20, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right) \times \mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right) = \mathbf{v}_{res}$$

Équation 2.21

avec \mathbf{v}_{res} , le vecteur résidus

En utilisant les propriétés du produit vectoriel, on peut réécrire l'Équation 2.21 :

$$\|\mathbf{v}_{res}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right\| \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right\| \sin^{err} \phi_2^i$$

Équation 2.22

Si les vecteurs normaux de l'Équation 2.21 sont unitaires, l'Équation 2.22 devient l'Équation 2.23 et permet la détermination de $^{err} \phi_2^i$.

$$\|\mathbf{v}_{res}\| = \sin^{err} \phi_2^i$$

Équation 2.23

En liant à chaque ϕ_2^i une erreur $^{err} \phi_2^i$, la détermination des contacts multiples devient possible. Chaque solution ϕ_2^i devient alors un intervalle $\phi_2^i \pm ^{err} \phi_2^i$ et non plus une solution unique. Chaque intervalle i est alors recoupé avec les autres intervalles. Ainsi, si l'intersection des intervalles i et j est non-nul, cela veut dire que la précision demandée lors de la résolution des équations ne permet pas de différencier la solution i de la solution j . Si l'on admet que la précision de résolution est bonne, alors on peut admettre que les paires de dents i et j sont en contact simultanément.

2.3.5 Analyse de transmission de couple et énergétique

2.3.5.1 Calcul du couple

Le calcul du rapport de couple, se fait en utilisant les résultats de l'analyse cinématique. Pour chaque position de la paire d'engrenage, un calcul statique est effectué afin de déterminer la valeur du couple transmis.

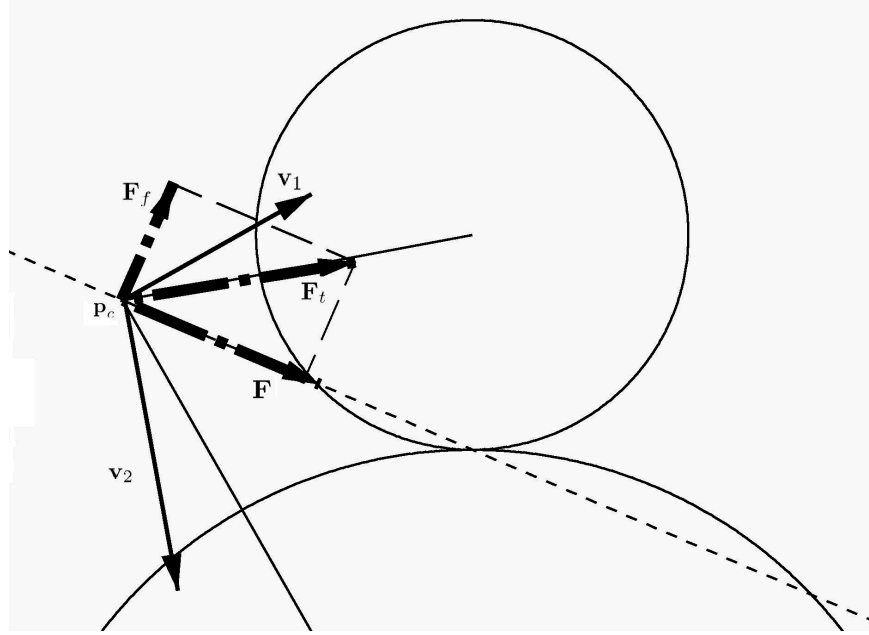


Figure 2.9: Calcul du couple transmis

La force appliquée par le moment auquel est soumise la roue (voir Figure 2.9) s'écrit comme :

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_c \times \mathbf{F}_t$$

Équation 2.24

La force \mathbf{F}_t peut être décomposée selon l'Équation 2.25.

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F} + \mathbf{F}_f$$

Équation 2.25

En utilisant la loi du frottement coulombien avec un coefficient de frottement μ , l'Équation 2.25 peut être réécrite et devient :

$$\mathbf{F}_t = F \left(\mathbf{n} - \mu \frac{\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right)$$

Équation 2.26

avec \mathbf{n} la normale au profil au point de contact et \mathbf{v}_{12} la vitesse de glissement.

En réécrivant l'Équation 2.24 avec l'Équation 2.26, on obtient l'Équation 2.27.

$$\mathbf{M} = F \left[\mathbf{p}_c \times \left(\mathbf{n} - \mu \frac{\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right) \right]$$

Équation 2.27

Concrètement, autant \mathbf{M} que F ne sont pas connus. Pour le calcul qui nous intéresse, la norme de \mathbf{M} n'est pas intéressante et peut être imposée, mais l'orientation de \mathbf{M} par contre n'est pas connue. La résolution de l'Équation 2.27 se fait donc sur les normes en imposant celle de \mathbf{M} (voir Équation 2.28). On peut donc calculer F .

$$F = \frac{\|\mathbf{M}\|}{\left\| \mathbf{p}_c \times \left(\mathbf{n} - \mu \frac{\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right) \right\|}$$

Équation 2.28

Pour déterminer le moment sur la deuxième roue M_2 on utilise le bilan de puissance, et on obtient l'Équation 2.29.

$$M_2 = \frac{\omega_1 M_1 - v_{12} F_f}{\omega_2}$$

Équation 2.29

où ω_i est la vitesse de rotation de la roue i . (Les variables écrites en *italique* représentent la norme des vecteurs)

2.3.5.2 Rendement

Le rendement est calculé selon l'Équation 2.30.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1}$$

Équation 2.30

Avec η le rendement, et P_i la puissance de la roue i .

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit la paramétrisation des profils que l'on va utiliser pour la suite du travail. Cette paramétrisation permet de développer la suite de la recherche en se basant sur une représentation des profils identique pour tous les cas. Le fait d'utiliser une description analytique des profils permet également de lever les incertitudes quant à la précision de leur représentation. Ce principe donne un avantage lors de l'utilisation des profils dans des calculs numériques, puisque leur géométrie n'est pas soumise aux imperfections numériques d'une approximation par splines, et permet d'écarter les profils des sources d'erreurs numériques.

On a également présenté les équations de contact que l'on utilisera lors des simulations numériques, ainsi que le traitement que l'on fera des résultats pour permettre la détermination du rapport de transmission instantané, du rapport de couple instantané, du rendement instantané, des angles de fin et début de la menée, ainsi que du rapport de conduite.

On traitera au chapitre suivant de la manière dont ces équations ont été implémentées pour permettre l'évaluation des performances cinématiques et énergétiques.

Chapitre 3 Code d'analyse des profils

Préambule : Dans ce chapitre, afin que l'architecture et le fonctionnement du code d'analyse des profils soient expliqués clairement et sans ambiguïté tout en utilisant les termes généralement admis dans la syntaxe de programmation, les termes désignant des éléments purement informatiques seront écrits en anglais et en police *italique* pour les différencier des mêmes termes utilisés dans un contexte autre qu'informatique. On espère ainsi que les éventuelles confusions seront évitées. Par exemple, si l'on parle de *function*, il ne faut pas voir une fonction mathématique, mais bien un élément informatique.

3.1 Introduction

Les éléments présentés dans ce chapitre sont en lien direct avec ceux du chapitre précédent. On décrit ici de quelle manière les éléments présentés précédemment ont été mis en place dans le logiciel de calcul MatLab (version R2011b).

On commence par décrire l'organisation générale du programme d'analyse. On présente ensuite plus précisément de quelle manière on implémente la description des profils. La suite du chapitre expose notre façon d'organiser l'analyse de l'engrènement des profils ainsi que les routines et algorithmes employés pour mener à bien cette analyse. On terminera ce chapitre en présentant une validation du code par comparaison des résultats de simulations de profils avec les solutions analytiques correspondantes disponibles dans la littérature.

3.2 Structure générale

Le programme s'articule autour du problème principal (la recherche du point de contact étant donné les profils r_1 et r_2) duquel dériveront les autres calculs. En effet, la suite des analyses, cinématiques ou statiques, ne peuvent se faire sans cette information.

L'analyse s'organise dans l'ordre suivant (voir également la Figure 3.1) :

1. Calcul des points de contact
2. Calcul de la cinématique
3. Calculs statiques

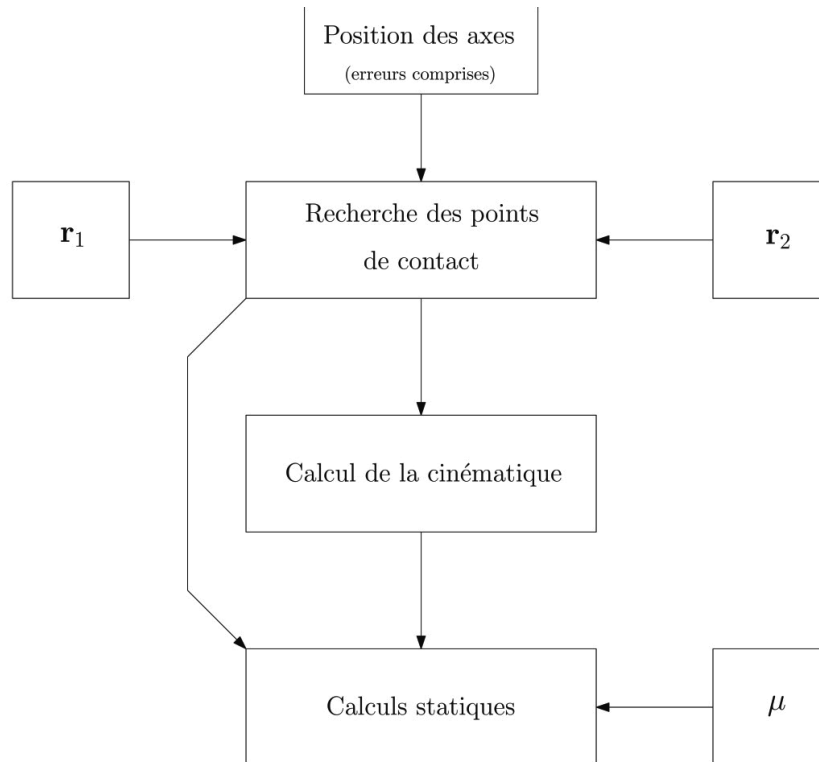


Figure 3.1: Schéma général de l'analyse

3.3 Représentation et fonctions des profils

On présente ici la mise en application des principes présentés au §2.2. Une des principales exigences qui a dirigé la description des profils a été de pouvoir mettre à disposition une représentation et un code de recherche des points de contact unique qui fonctionnent pour tous les cas de dentures sans recoder les équations de contact. De cette façon, on met à disposition un outil versatile et d'utilisation pratique.

Dans MatLab la *class* est la solution informatique permettant de regrouper un grand nombre d'informations tant numériques que descriptives et d'y lier des fonctions (nécessaires pour la représentation des profils).

Dans ce qui suit, on fait une simple et rapide description de ce qu'est une *class*, pour permettre au lecteur d'aborder la description du programme sans trop de problèmes. Pour connaître plus de détails concernant la programmation des *class* et des règles de la programmation orientée objet, on laisse le soin au lecteur de se tourner vers des ouvrages spécialisés traitant de la programmation [36]. Pour le cas qui nous intéresse, il suffit de se référer aux différents documents liés au logiciel Matlab [37].

3.3.1 Concepts de base concernant la programmation orientée objet

Ce paragraphe définit les différents termes liés à la programmation des *class* qui seront utilisés également dans la suite du document. Les concepts décrits sont ceux de *class*, d'*object*, de *property*, de *method* et de *function*.

Class Une *class* est le code qui définit un *object*

Object : Un *object* est une entité qui existe de manière propre à elle-même et qui permet de stocker des informations et des opérations à effectuer sur ces informations. Le nombre de champs pouvant contenir des informations est à définir lors de l'établissement de la *class*. Par contre un *object* a cela de particulier et de puissant qu'au-delà des valeurs stockées, il possède ce qu'on appelle des *methods* qui ne peuvent être appliquées qu'à l'objet, et qui y sont directement liées. Les *objects* ont donc deux entités importantes distinctes, les *properties* qui sont formés de plusieurs champs contenant les valeurs définissant l'objet, et les *methods* qui elles définissent les différentes *functions* spécifiques à l'objet.

Property : Une *property* est un attribut de l'*object*. Il peut s'agir d'une valeur ou de tout autre élément informatique. En général elle sert à décrire un élément de l'*object* comme, le nombre de dents de la roue, pour donner un exemple lié à notre problème.

method : Une *method* est une *function* liée à l'*object* qui peut utiliser tous les attributs qui y sont liés sans que cela ne soit explicitement formulé. Les *methods* doivent être appelées par le code pour être lancées, à l'exception d'une *method* particulière nommée constructeur. La *method* constructeur est lancée automatiquement lors de la création de l'*object* et permet de calculer des *properties* additionnelles (par exemple : diamètre primitif) ou d'effectuer d'autres actions.

function : Il s'agit d'une partie de code distincte du corps du programme principal, pour en améliorer la lisibilité ainsi que pour éviter les répétitions. En général une *function* est écrite lorsqu'une partie de code doit être souvent répétée.

Exemple : *Class* Matrice

Si on décide de créer une *class* informatique « matrice », elle permettra de stocker sous un seul nom de variable, une certaine quantité de données, qui correspond aux dimensions de la matrice. Ces données sont alors des *properties* de la *class*. Par contre, on doit associer à cette matrice une algèbre particulière, et redéfinir la multiplication, la division, l'addition, etc..., qui sont alors des *methods*. Mais on peut aussi associer des *methods* plus poussées, comme la résolution de systèmes d'équations via la méthode de Gauss.

3.3.2 Class PROFIL

Les *class* représentant les profils seront constituées, comme présenté au paragraphe précédent, d'attributs (*properties*) et de *methods*.

Le gros avantage des *class* pour notre problème, est que l'on peut associer des équations à des entités que l'on peut passer en argument entre les différentes *functions*, ce qui permet le passage des équations des profils, et pas uniquement des valeurs, tout en conservant le même code de résolution.

Afin de simplifier la lecture, ce paragraphe résume l'architecture et le fonctionnement des *class* de type profil. Le fonctionnement de la *class* est également représenté schématiquement dans la Figure 3.2.

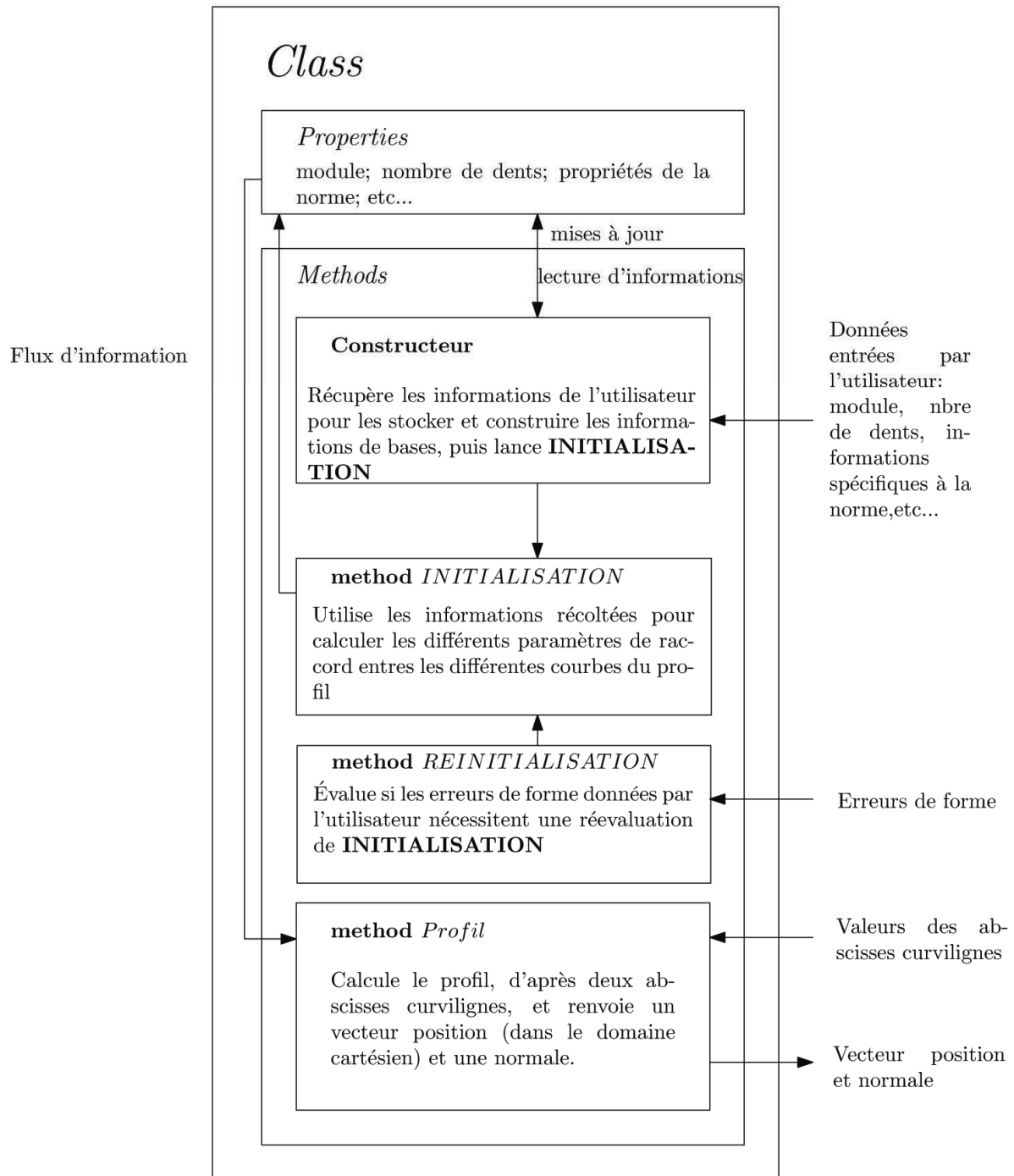


Figure 3.2: Schéma de fonctionnement de la *class* Profil

3.3.2.1 *Method CONSTRUCTEUR*

Le constructeur calcule tous les éléments nécessaires à la représentation du profil d'après une série de données : le module, le nombre de dents de l'élément créé (pignon ou roue), la hauteur de la roue, une chaîne de caractères contenant l'indication si l'élément est une roue ou un pignon (élément qui peut varier le profil suivant la norme), le nombre de dents du pignon (indépendant du fait que l'élément créé soit une roue ou un pignon). Si la hauteur est 0, le profil est considéré comme plan, et le problème comme étant un problème 2D. Grâce à ces valeurs, on va calculer tous les attributs de la roue (ou du pignon), tels que diamètre primitif, pas, etc... Une autre partie importante du constructeur est de calculer les points de transition entre deux courbes différentes du profil, par exemple le point de tangence entre le cercle de fond et la courbe de pied de dent. Ces positions sont par contre calculées dans une autre *method* (Initialisation)

Toutes les *properties* définies dans la déclaration de *class* doivent être initialisées soit dans la déclaration elle-même, soit dans le constructeur, qui est la seule *method* de la *class* à être lancée automatiquement.

Les principales actions du constructeur sont les suivantes :

1. Attribuer les éléments passés en arguments aux éléments correspondants de la *class* (module, nombre de dents, hauteur, type de roue, nombre de dents du pignon, etc...)
2. Calculer les grandeurs générales : diamètre primitif, ...
3. Calculer les éléments spécifiques à la norme : rayon de cercles de fond, hauteur de pied de dent, etc...
4. Lancer la *method* d'initialisation

3.3.2.2 *Method INITIALISATION*

Cette *method* contient les éléments de la *class* nécessitant une éventuelle réévaluation si certains éléments doivent être modifiés à cause d'une erreur de forme générant des conflits de géométrie.

Elle est utilisée pour calculer tous les points de raccordement et de transition entre les différentes courbes du profil. Elle détermine la position des points de transition ainsi que les valeurs des abscisses naturelles des différentes courbes en ces points.

Cette *method* calcule aussi les longueurs des différents arcs de courbe pour simplifier le travail du code traitant les erreurs proposées par l'utilisateur (voir également §3.4).

Les buts de la *method* INITIALISATION sont donc de :

1. Déterminer les points de raccordement entre les différentes courbes du profil. Pour cela il existe deux possibilités
 - a. La solution est connue
 - b. La solution doit être calculée. Une *function* peut alors être créée pour calculer ces points
2. Calculer les longueurs des différents morceaux de profils. (pour permettre le calcul du changement de variable pour la simulation d'erreurs de forme)

Cette *method* ne renvoie pas de valeur à l'utilisateur ; elle agit uniquement sur les *properties* de la *class*. Le programme principal n'invoque jamais directement cette *method*.

3.3.2.3 *Method REINITIALISATION*

Cette *method* que l'on appelle lors d'une simulation d'erreur de forme de profil, fait l'évaluation des erreurs aux points critiques (cercles pour éviter les singularités par exemple).

Elle prend en argument une chaîne de caractères qui décrit sous forme de fonction mathématique les erreurs de profil définies par l'utilisateur lors de la définition du problème.

Les résultats de cette *method* sont appliqués directement sur les *properties*.

La *method* effectue les actions suivantes :

1. Evaluer les erreurs de forme aux endroits critiques du profil (particulièrement autour des cercles de régularisation des singularités)
2. Déterminer si une correction des *properties* est nécessaire ou pas. (par exemple augmentation du rayon d'un cercle)
3. Si les *properties* ont été modifiées, relancer la *method* d'initialisation (§ précédent).

3.3.2.4 *method PROFIL*

La *method* contenant le profil renvoie la position ainsi que le vecteur normal au profil à partir de deux paramètres. C'est dans cette *method* que sont appliqués les principes de paramétrisation du profil exposé au chapitre précédent. On rappelle que cette paramétrisation utilise des abscisses curvilignes dont les valeurs sont comprises entre -2 et +2, et que le profil théorique, hors raccords de tête et pied de dent et arêtes, est compris entre -1 et +1.

Cette *method* conditionne tous les calculs. Les équations de contact ont beau être efficaces et relativement robustes, si les équations de profils ne le sont pas, alors l'analyse cinématique, puis statique, seront lentes et ne fourniront pas les résultats désirés.

Elle prend en argument un vecteur à deux composantes qui sont les paramètres de la surface du profil. La méthode renvoie alors deux vecteurs à 3 composantes chacun :

1. Le vecteur position (\mathbf{r})
2. Le vecteur normal à la surface en ce point (\mathbf{n})

3.4 Fonctions erreurs

Ce paragraphe explique la manière dont les erreurs de forme sont traitées et simulées. Ces fonctions erreurs permettent de simuler les erreurs d'usinage et d'ainsi quantifier leur effet.

Les fonctions qui servent à modéliser ces erreurs, bien qu'également définies dans l'intervalle [-2 ; 2], ne sont pas liées directement aux abscisses utilisées pour représenter le profil. Ce choix est dicté uniquement par la simplicité d'utilisation. Ainsi les fonctions erreurs utilisent une abscisse curviligne réarrangée liée à la longueur d'arc du profil.

Les fonctions erreurs sont fournies par l'utilisateur sous forme analytique avec deux variables correspondant aux deux abscisses curvilignes également décrites au chapitre précédent (§2.2.6).

Un changement de variable linéaire par morceau est considéré suffisant pour simuler les erreurs. La fonction erreur f_{err} correspond donc à l'équation ci-dessous :

$$f_{err}(u, \theta) = f_{err}(a(u), b(\theta))$$

Équation 3.1

Avec $a(u)$ et $b(\theta)$ les changements de variable linéaire par morceau.

Ces changements de variables impliquent quelques calculs supplémentaires dont la première étape est la détermination des longueurs des différents segments du profil (fond de dent, pied de dent, cercles de raccord, etc..). Ceci est fait numériquement par la *method* d'initialisation selon l'Équation 3.2.

$$l_j = \sum_i \|\mathbf{r}_1(u_{i+1}, \theta) - \mathbf{r}_1(u_i, \theta)\|$$

Équation 3.2

Avec l_j la longueur du segment j , et u_i la valeur de l'abscisse u au pas de calcul i .

On calcule ensuite des coefficients (J_j) pour obtenir les proportions des différents arcs constituant le profil.

$$J_j = \frac{l_j}{l_{tot}}$$

Équation 3.3

Avec J_j la proportion de longueur du segment j , et l_{tot} la longueur totale du flanc ($l_{tot} = \sum_j l_j$).

Les mêmes étapes sont effectuées sur l'autre abscisse (θ).

Le changement de variable $a(u)$ (ou $b(\theta)$) se fait selon l'équation :

$$a_j(u) = J_j(u - p_j) + \sum_{n=1}^{n=j-1} J_n$$

Équation 3.4

Avec $a_j(u)$ la valeur de l'abscisse à utiliser dans la fonction f_{err} correspondant au segment j , et p_j la valeur de l'abscisse u au point de transition entre les segments j et $j-1$.

Se pose ensuite le problème du calcul de la nouvelle normale à associer au point soumis à l'erreur de forme. Pour simplifier la réutilisation des modules d'erreurs et éviter de fastidieux calculs, on calcule la normale au moyen d'un schéma aux différences finies. La nouvelle normale associée à \mathbf{r}_{1err} est ainsi calculée selon l'Équation 3.5.

$$\mathbf{n}_{1err}(u, \theta) = \frac{\mathbf{r}_{1err}(u+\Delta u, \theta) - \mathbf{r}_{1err}(u-\Delta u, \theta)}{2\Delta u} \times \frac{\mathbf{r}_{1err}(u, \theta+\Delta \theta) - \mathbf{r}_{1err}(u, \theta-\Delta \theta)}{2\Delta \theta}$$

Équation 3.5

On précise que cette manière d'évaluer les erreurs augmente fortement le nombre d'évaluations de la *method* PROFIL et ralentit considérablement l'évaluation des profils.

3.5 Structure de l'analyse

Les équations à résoudre pour obtenir les différentes informations nécessaires à l'analyse des profils sont détaillées au §2.3. Ce paragraphe ne détaille que la stratégie et les outils mis en place pour calculer les caractéristiques cinématiques et statiques.

Les grandeurs qui nous intéressent, c'est-à-dire rapport de transmission instantané, rapport de couple instantané et rendement, sont déduites de la résolution du problème de la recherche du point de contact pour différentes positions de la roue menante. Pour chaque position de la roue menante la recherche du point de contact permet d'obtenir les informations suivantes : position de la roue menée, position du point de contact sur la roue menante et sur la roue menée, direction de la normale au point de contact.

La stratégie de résolution est donc d'imposer différentes position de la roue menante dans l'intervalle où les points de contacts entre les dents sont possibles. Ces différentes positions seront analysées et permettront le calcul des autres informations.

3.5.1 Algorithme de résolution

La résolution des équations (Équation 2.15 et Équation 2.16) dans le logiciel Matlab peut se faire de manière automatique. Les algorithmes de résolutions sont déjà codés dans le logiciel et sont très efficaces. L'algorithme choisi ici est le *dogleg* qui fonctionne par établissement de zones de confiance et qui fournit de bons résultats pour les équations non-linéaires dont les gradients ne peuvent être fournis. Des informations plus précises concernant l'algorithme utilisé peuvent être trouvées dans la documentation liée au logiciel [37]. Cet algorithme en particulier est décrit dans la référence [38] et est présenté dans un grand nombre d'ouvrage dont [39], mais est généralement utilisé dans le cas d'optimisation et non de résolution d'équations.

La forme que l'on donne aux équations doit donc respecter les particularités du problème d'optimisation, tout en pouvant profiter des avantages de ce mode de résolution, à savoir, dans notre cas, la surdétermination (nombre d'équations plus grand que le nombre d'inconnues). Les équations présentées au chapitre précédent (Équation 2.15 et Équation 2.16) ne sont pas celles réellement résolues par l'algorithme, et se présentent sous une forme légèrement différente présentée ci-dessous.

$$\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c) - \mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi)\mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c) = 0$$

$$\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1err}(u_c, \theta_c)}{\partial \theta} \right) \times \mathbf{M}_{f2}(\phi_2, E, \beta, \psi) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{2err}(v_c, \gamma_c)}{\partial \gamma} \right) = 0$$

Équation 3.6

Les équations réglant les normales entre elles sont réécrites sous la forme d'un produit vectoriel. L'avantage de l'écriture sous cette forme est l'élimination du paramètre λ (voir Équation 2.16), qui nécessitait d'introduire une normalisation de vecteurs, une manipulation que l'on préfère éviter lors de calculs numériques. Cette élimination n'est possible que parce que ni le sens du vecteur, ni sa norme, n'ont d'importance pour le calcul : seule la direction compte, ce qui n'est pas le cas en général, mais s'avère suffisant pour résoudre notre problème. Cette élimination ne cause pas de problème si la direction des vecteurs normaux est définie correctement dans les équations de profil. Toutefois on peut se contenter d'une simple soustraction si les normes des normales sont directement définies comme unitaires dans les *class* PROFIL, et que le sens de la normale est dirigé vers l'extérieur du profil.

La Figure 3.3 montre les différents échanges d'informations dans le programme mis en place.

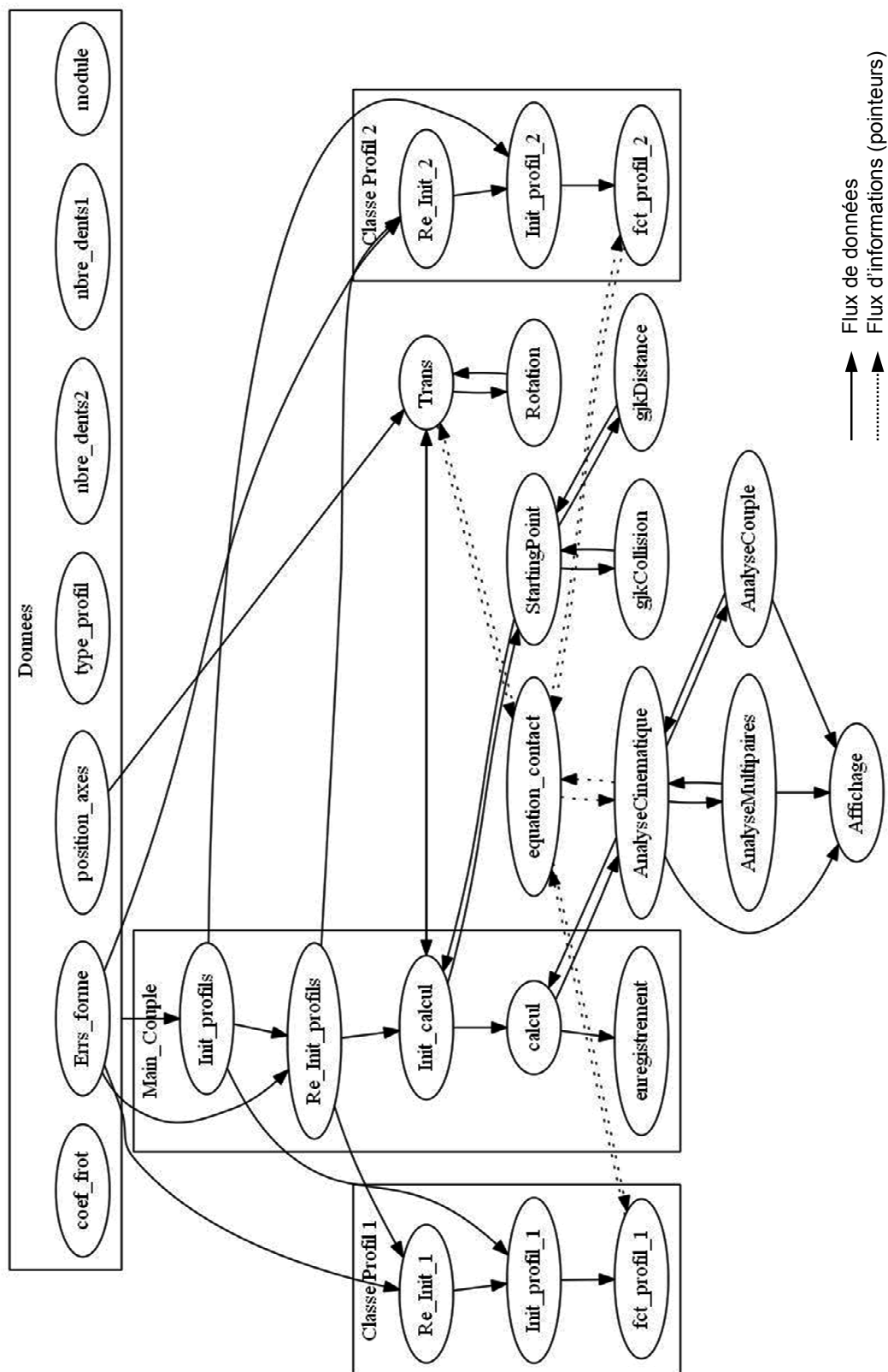


Figure 3.3: Organigramme détaillé de l'outil d'analyse cinématique

3.5.2 Choix du point de départ de l'algorithme de résolution (contribution de M.Perruchoud [40])

Un des problèmes du calcul tel qu'effectué dans notre outil de simulation, est le choix du point de départ donné à la *function* Matlab qui doit résoudre les équations de contact. Le choix d'un point de départ trop éloigné du point de contact solution, peut conduire à l'échec de la résolution, ou fournir une solution d'un intérêt moindre, comme par exemple sur une dent différente de celle désirée. La méthode de choix du point de départ de l'algorithme de résolution a été mise en place par M. Perruchoud [38] lors de son stage au sein de l'entreprise partenaire.

La solution proposée par M.Perruchoud, est d'utiliser un algorithme plus simple, plus rapide, mais moins précis, que la méthode proposée dans les paragraphes précédents pour la recherche du point de contact. Cet algorithme utilise une approximation des dents en contact et permet d'obtenir rapidement une solution approchée du point de contact, et ainsi fournit un point de départ pour le calcul. L'algorithme proposé est basé sur l'algorithme GJK (Gilbert-Johnson-Keerthi) (voir [41]). Il existe deux algorithmes basés sur la même méthode qui fournissent deux grandeurs différentes. Les deux sont utilisés dans le cas qui nous intéresse. Le premier permet de déterminer la collision entre deux formes, ce qui nous permet de déterminer un angle de départ $\phi_{\text{départ}}$. Le second permet le calcul de la distance la plus courte entre les deux approximations de dents. Bien que cette valeur soit sans grand intérêt ce calcul nous permet néanmoins de déterminer la position d'un point sur chacune de ces formes, décrivant ainsi le segment de droite le plus court entre les formes, ce qui nous fournit les abscisses curvilignes de départ des deux dents à mettre en contact.

3.6 Validation

L'intention de ce paragraphe est de montrer, au moyen de cas connus, que le code développé et mis en place évalue correctement les comportements cinématiques et statiques des dentures de profils prescrits r_1 et r_2 .

On divise cette validation en deux paragraphes distincts, le premier concernant la cinématique, le second le couple.

3.6.1 Validation du comportement cinématique

Le but de cette section est de confirmer que le code calcule correctement les grandeurs cinématiques étant donnés deux profils de dent. Pour cela on utilise le profil en développante. Celui-ci permet une évaluation rapide du comportement du code, puisque le résultat du rapport de transmission doit être une constante durant tout l'engrènement, et que le comportement de ce profil est très étudié et bien connu.

Pour ce faire, on a choisi d'évaluer un engrènement, avec une roue menante à 80 dents, contre une roue menée à 40 dents, avec un angle de pression de 20° , une hauteur de dent valant 1 et un creux de dent de 1.25. On évalue le comportement au point de fonctionnement nominal, et on s'intéresse aux valeurs suivantes :

- Rapport de transmission instantané
- Rapport de conduite

Comme on le sait, le rapport de transmission doit être une constante tant que le contact se fait entre deux profils de développante, et on doit également observer un rapport de conduite supérieur à 1. Pour le cas traité ici, en utilisant la formule de calcul proposée par Henriot [5], le rapport de conduite doit valoir 1.77.

$$\epsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[\sqrt{\frac{z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + h_{a1}^2 + z_1 h_{a1}} + \sqrt{\frac{z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + h_{a2}^2 + z_2 h_{a2}} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha \right]$$

Équation 3.7

Dans l'Équation 3.7 ϵ est le rapport de conduite, α l'angle de pression, h_{ai} la hauteur de dent de la roue i normée par rapport au module, z_i le nombre de dent de la roue i .

Les résultats fournis par le code sont présentés à la Figure 3.4.

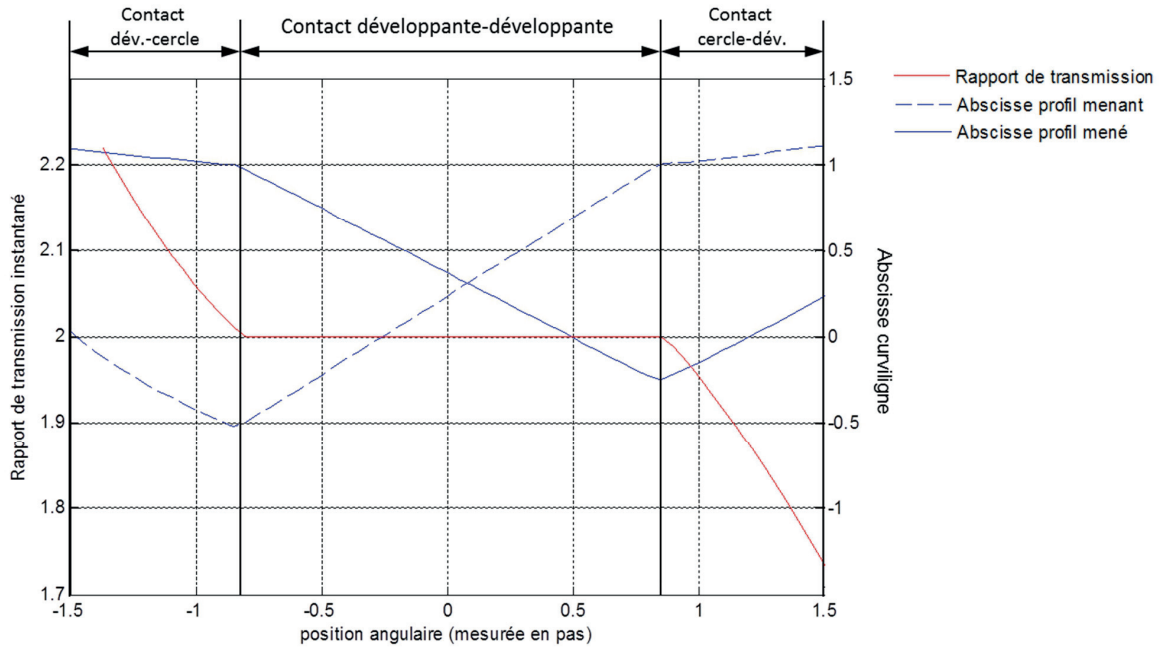


Figure 3.4: Résultats d'analyse d'un profil à développante (20°, 80-40)

Le code fournit une valeur du rapport de conduite valant 1.76 qui diffère de 0.5% de la valeur théorique calculée avec l'Équation 3.7.

On observe que le rapport de transmission prend la valeur attendue (2) entre environ ~ -0.8 et $\sim +0.8$ pas, soit dès que le contact se fait entre les profils à développante (abscisses curvilignes dans l'intervalle $[-1 ; 1]$).

On peut dès lors conclure que la programmation des profils à développante ainsi que le calcul des points de contact ont été faits de manière satisfaisante, et fournissent des résultats très proches des valeurs données par les calculs analytiques. La méthode de détermination des éventuels contacts entre plusieurs dents fournit également de bons résultats, comme démontré par la bonne correspondance des rapports de conduite calculé et théorique.

Le choix de la représentation des profils démontre son utilité ici en permettant la détermination rapide des zones où le contact se fait : soit sur la développante, soit sur les raccords de pied et de tête. Pour information on précise que l'ensemble des calculs prend environ 40 secondes (affichages compris) sur le logiciel Matlab R2011b, avec un PC de bureau de base (Windows7, 32-bits, RAM : 3GBs, IntelCore2 Quad @ 2,33 GHz).

3.6.2 Validation du comportement du rapport de couple

De manière similaire au paragraphe précédent, on souhaite cette fois valider les résultats du code pour les valeurs de couple. Pour cela on utilise les propriétés du profil à couple constant breveté par ETA (voir § 1.7.2.4), qui a été analytiquement développé pour fournir un couple constant le long de l'engrènement, en présence de frottement coulombien au point de contact.

Les paramètres nécessaires à l'établissement du profil sont plus nombreux et comprennent notamment un angle (assimilable à un angle de pression, voir [26]) et un rendement moyen. Pour l'exemple choisi on utilise un rendement moyen $\eta = 0.97$, ainsi qu'un angle de 25° . Comme pour l'exemple de la développante on choisit un nombre de dents de 80 pour la roue menante contre 40 pour la roue menée. On prend une valeur du coefficient de frottement de $\mu=0.2$.

La Figure 3.5 représente les résultats fournis par le code. On remarque qu'il existe une zone entre ~ -0.5 et $\sim +1.1$ qui permet une transmission à couple constant, ce qui est attendu puisque ce profil a été développé pour cet objectif. La valeur du rapport de couple est dans le cas présenté de $j=0.485$. Puisque la moyenne du rapport de transmission vaut $m_{21} = 2$, on obtient un rendement moyen $\eta = j \cdot m_{21} = 0.97$, ce qui correspond à la valeur fournie au départ. On note également, comme au paragraphe précédent, que la transmission constante de couple ne se fait que lorsque les profils sont en contact dans la zone d'abscisse $[-1 ; 1]$. On peut donc conclure que le calcul des points de contact et celui des moments se fait de manière adéquate.

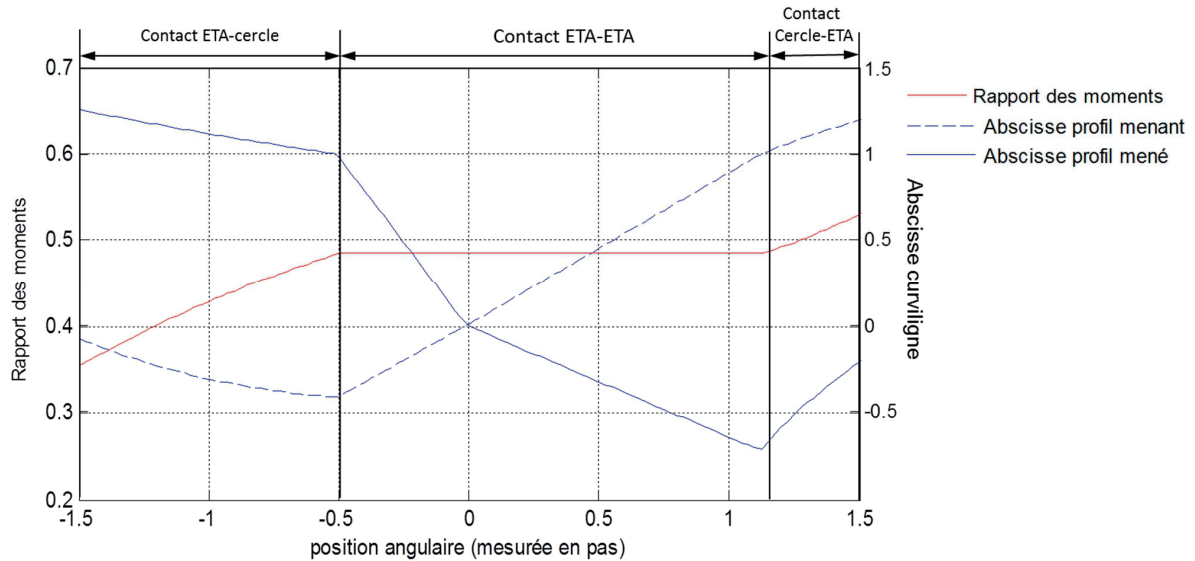


Figure 3.5: Résultats d'analyse du profil ETA (80-40, 25° , $\eta=0.97$, $\mu=0.2$)

La discontinuité visible sur l'abscisse du profil mené est due à la construction du profil, celui-ci étant formé par deux équations différentes. Le lieu du changement de pente de l'abscisse (0) n'est également pas anodin, puisqu'il s'agit de l'endroit où l'on croise la ligne des centres, et également le point où la vitesse de glissement est nulle et le frottement change de sens.

3.7 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre de quelle manière les équations et les paramétrisations présentées au Chapitre 2 avaient été implémentées dans un code de résolution numérique à l'aide du logiciel Matlab. On a aussi fourni une validation simple du code.

On a pu voir, pour deux types de profils pour lesquels des solutions analytiques existent, que les résultats tant au niveau du rapport de transmission cinématique instantané que du rapport des moments correspondent aux résultats des analyses théoriques.

On a montré que la paramétrisation des profils permettait de repérer rapidement les zones où les contacts se font sur des zones de raccord et non sur le profil analytique. Malheureusement, cette paramétrisation qui simplifie la lecture des résultats n'est pas le meilleur choix en ce qui concerne la vitesse de résolution du code. Des longueurs d'arcs très différentes pour un même intervalle d'abscisse ne favorisent pas la vitesse de résolution, car elles mènent à un mauvais conditionnement du problème, qui finalement peut être différent suivant le segment de dent où le contact se produit. Toutefois, bien que perfectible, le code permet d'obtenir de bons résultats avec des temps de calcul raisonnables (~40 s) compte tenu du nombre de résolutions à effectuer.

Chapitre 4 Génération des profils

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté l'analyse permettant d'obtenir le rapport de transmission et le rapport de couples étant donnés les profils des dentures menante et menée (r_1 et r_2). Ce chapitre développe la méthode de génération du profil de la denture menée lorsque l'on impose un profil de denture menante et le comportement cinématique ou statique de l'engrenage (rapport de transmission ou rapport de couple, respectivement). On commence par décrire la technique de génération de profil par la théorie des enveloppes dans le cas de la conjugaison cinématique, puis on se tourne vers le développement d'équations permettant de générer des profils satisfaisant une contrainte de conjugaison de profils en couple. On présente d'abord une analyse générale tridimensionnelle que l'on spécialise ensuite au cas des profils plans.

4.2 Profils conjugués cinématiques

Avant d'aborder la description des équations de conjugaison cinématique, on rappelle ici la définition d'un profil conjugué présentée au §1.6.1.

Pour éviter les confusions que la notion de profil conjugué peut apporter dans la suite du discours, on se permet d'adjoindre l'adjectif « cinématique » à la notion traditionnelle de conjugaison.

On rappelle donc que la définition généralisée de conjugaison *cinématique* des profils peut se formuler comme suit :

Deux profils sont dits conjugués cinématiques, s'ils suivent la loi de mouvement prescrite.

4.2.1 Définition du problème

Soit deux corps en rotation autour d'axes quelconques avec des angles de rotations ϕ_1 et ϕ_2 , ainsi qu'une loi de mouvement ($m_{21}(\phi_1) = \frac{1}{i(\phi_1)}$) qui lie ces deux angles.

Le problème peut se poser de plusieurs façons différentes, mais il est présenté dans la plupart des ouvrages ou références récents ([6, 7, 13, 42]) comme la recherche de la surface r_2 du deuxième corps étant données la surface r_1 du premier corps et la loi de mouvement $m_{21}(\phi_1)$.

4.2.2 Théorie classique

La théorie développée par Litvin [6, 31] est basée principalement sur la géométrie différentielle.

On décrit les profils comme des équations de surfaces, que l'on peut réduire à une ligne si le profil de la roue (ou du pignon) peut être considéré comme un cylindre (au sens mathématique du terme), par exemple dans les engrenages plans à denture droite. Malheureusement cette situation reste un des rares cas où l'on peut se limiter à l'étude dans le plan.

Dans le cas cinématique, la position de la menante ou de la menée ne change pas le problème, ce qui n'est pas le cas pour la conjugaison en couple présentée plus loin.

D'une manière générale, le problème peut se poser de la manière suivante :

Soit trois repères distincts : S_1 , S_2 , S_f . On associe à ces repères, respectivement, le corps 1, le corps 2, et l'environnement de référence. L'origine de S_1 , ainsi que celle de S_2 se trouvent sur les axes de rotation des corps 1 et 2 respectivement. La Figure 4.1 représente cette configuration, et est la même que celle utilisée pour l'analyse exposée au Chapitre 2.

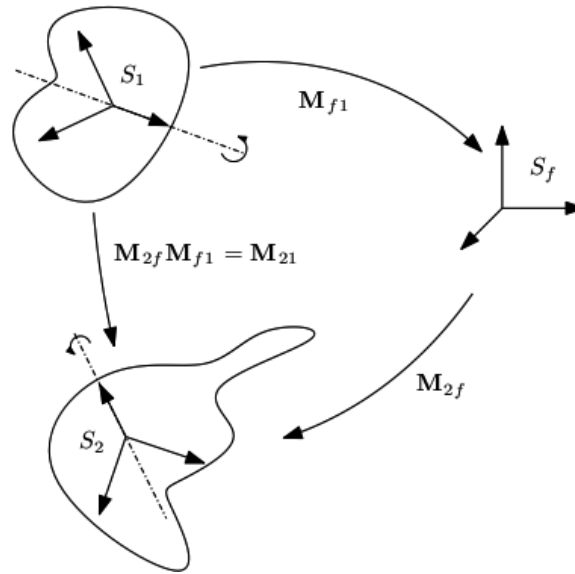


Figure 4.1: Disposition des 3 repères utilisés pour l'analyse de conjugaison

On applique également les mêmes simplifications :

1. On lie l'origine de S_f à celle de S_1
2. La position de S_1 est identique à celle de S_f lorsque $t=0$, et on définit l'angle de rotation $\phi_1=0$ à ce moment-là. La loi de transformation du référentiel S_1 dans le référentiel S_f M_{f1} représente alors une rotation d'angle ϕ_1 .

On utilise aussi la même nomenclature qu'au Chapitre 2 pour décrire le profil \mathbf{r}_1 :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, \theta)$$

Équation 4.1

Avec \mathbf{r}_1 l'équation de la surface du corps 1, et u, θ , les paramètres définissant la surface.

On connaît aussi les transformations suivantes (voir Figure 4.1) :

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow S_f : \mathbf{M}_{f1} \\ S_f &\rightarrow S_2 : \mathbf{M}_{2f} \\ S_1 &\rightarrow S_2 : \mathbf{M}_{2f} \mathbf{M}_{f1} = \mathbf{M}_{21} \end{aligned}$$

qui dépendent de paramètres définissant la cinématique d'un référentiel par rapport à l'autre, et qui sont cette fois, contrairement aux chapitres précédents, tous connus.

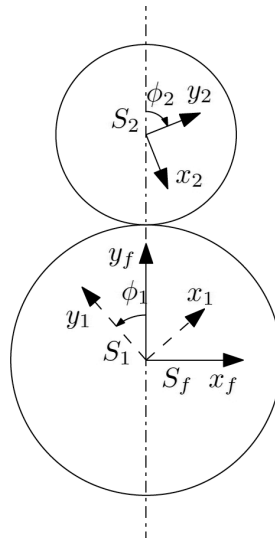


Figure 4.2: Disposition des repères dans le cas des engrenages plans

On admet pour le cas étudié un angle ϕ_1 , qui représente la rotation du repère S_1 (et tout ce qui y est lié) par rapport à S_f . On admet aussi un angle ϕ_2 qui représente la rotation du repère S_2 (voir Figure 4.2), et qui est liée à ϕ_1 par la relation $\phi_2 = \int_0^{\phi_1} m_{21}(\phi_1) d\phi_1$. m_{21} est défini comme le rapport instantané⁶ des vitesses de rotation des deux corps. Ainsi, si on est dans le cas simple des engrenages plans à rapport de vitesses constant, on peut simplement écrire $\phi_2 = m_{21} \cdot \phi_1$ avec m_{21} constant et qui est aussi le rapport des diamètres primitifs.

⁶ Le terme « instantané » est ici un abus de langage, puisqu'on ne fait aucune référence au temps. Malgré tout, il permet de comprendre rapidement le propos, même si la définition n'est pas exacte. Dans un souci de clarté, on a choisi de conserver ce terme tout au long du texte.

Dans le cas général, le rapport instantané de transmission s'écrit :

$$m_{21} = \frac{d\phi_2}{d\phi_1}$$

Équation 4.2

L'Equation 4.2 impose la loi pour passer d'un repère à l'autre. On veut maintenant déterminer la surface du deuxième corps en contact qui permettra de respecter cette loi. On peut représenter les points de la surface \mathbf{r}_1 dans le repère S_2 , ce qui se fait selon l'Équation 4.3.

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u, \theta, \phi_1) = \mathbf{M}_{21}(\phi_1)\mathbf{r}_1(u, \theta)$$

Équation 4.3

\mathbf{M}_{21} ne dépend ici que de ϕ_1 contrairement au cas présenté au §4.3 car on connaît m_{21} et donc ϕ_2 .

Pour l'instant \mathbf{r}_2 comme décrit par l'Équation 4.3 représente une famille de surfaces. Il s'agit maintenant de sélectionner quels points de cet ensemble de surfaces formeront le profil solution \mathbf{r}_2 . La condition qui nous permet de déterminer la surface \mathbf{r}_2 qui respectera la loi de mouvement et qui formera la solution se présente sous la forme de l'Équation 4.4.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi_1} = 0$$

Équation 4.4

Cette équation, dont l'interprétation géométrique est donnée plus bas, permet de déterminer la surface qui va satisfaire au problème de conjugaison. Il s'agit finalement de la seule équation régissant le problème des surfaces d'engrènement, et elle est nommée dans la plupart des textes traitant du sujet comme « *the equation of meshing* »

De manière rigoureuse, l'Équation 4.3 est une famille de surface et l'Équation 4.4 est l'équation de l'enveloppe à cette famille (voir [43]). Une enveloppe est une surface qui satisfait aux conditions suivantes :

1. Chaque point de l'enveloppe appartient à l'une des courbes de la famille qu'elle enveloppe
2. L'enveloppe rencontre chaque courbe de la famille tangentiellement

Cette méthode, dite des enveloppes, permet donc de générer le profil \mathbf{r}_2 respectant la loi de mouvement m_{21} à partir d'un profil \mathbf{r}_1 imposé. Ceci revient à générer un profil conjugué (au sens de Henriot et Litvin, donc cinématique) au profil \mathbf{r}_1 .

Litvin [6] décrit une alternative à l'Équation 4.4 qui représente une formulation plus technique , choisie aussi par Wu et Luo [42] dans leur ouvrage. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \right) \cdot \mathbf{v}_{12} = 0$$

Équation 4.5

avec \mathbf{v}_{12} la vitesse de glissement entre S_1 et S_2 représentée dans le référentiel S_2 . Cette forme de l'équation a une signification physique concrète, puisqu'il s'agit de déterminer la surface \mathbf{r}_2 dont la normale sera constamment perpendiculaire à la vitesse de glissement. Cette version a l'avantage de faire le lien avec la vitesse des corps, en faisant intervenir la vitesse de glissement, principale source de pertes dans les engrènements (si on ne tient pas compte des paliers).

La vitesse de glissement étant une grandeur largement utilisée dans la suite de l'exposé, on montre plus en détail de quelle manière on peut la calculer.

La vitesse relative du point de contact (P_{int} sur la Figure 4.3) entre le corps 1 et le corps 2 s'exprime comme

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Équation 4.6

où \mathbf{v}_i est la vitesse du point de contact considéré du corps i .

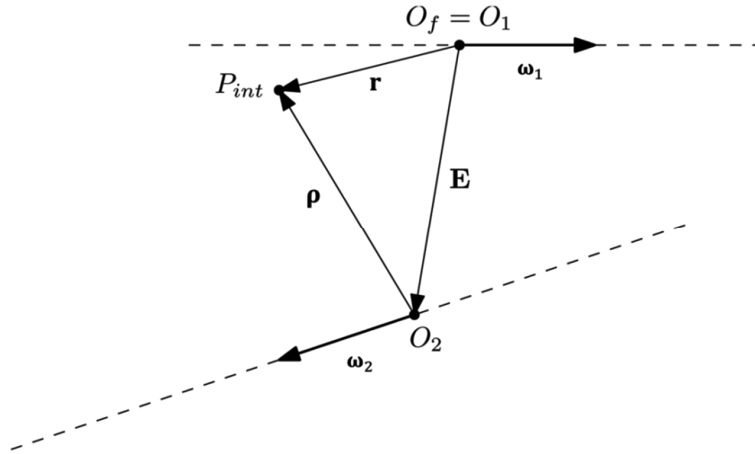


Figure 4.3: Schéma vectoriel pour la dérivation de la vitesse relative (les vecteurs ω_1 et ω_2 sont perpendiculaires au plan formé par les vecteurs ρ , \mathbf{E} et \mathbf{r})

Si l'on exprime ces vitesses en fonction de la rotation du corps et du vecteur de position entre un point de l'axe de rotation et le point de contact (voir Figure 4.3) on obtient :

$$\mathbf{v}_1 = \omega_1 \times \mathbf{r}$$

Équation 4.7

$$\mathbf{v}_2 = \omega_2 \times \rho$$

Équation 4.8

Avec ω_i la vitesse de rotation du corps i , \mathbf{r} et ρ les vecteurs de position du point de contact par rapport aux axes de rotation respectifs. On a aussi

$$\mathbf{v}_2 = \omega_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{E})$$

Équation 4.9

On peut ainsi dériver la vitesse relative \mathbf{v}_{12} :

$$\mathbf{v}_{12} = [(\omega_1 - \omega_2) \times \mathbf{r}] - (\mathbf{E} \times \omega_2)$$

Équation 4.10

Cette vitesse peut être représentée dans les trois repères différents :

$$\mathbf{v}_{12}^{(i)} = [(\omega_1^{(i)} - \omega_2^{(i)}) \times \mathbf{r}^{(i)}] - (\mathbf{E}^{(i)} \times \omega_2^{(i)}) \quad (i = 1, 2, f)$$

Équation 4.11

4.2.3 Limitations de la théorie classique

La méthode analytique présentée dans les paragraphes précédents n'est applicable directement que pour des courbes régulières de classe C^2 et dont les dérivées sont également régulières. Cette limitation ne permet donc pas de générer *directement* le profil cycloïdal conjugué dans son entier, mais en deux phases :

- Saillie du pignon contre pied de la roue
- Saillie de la roue contre pied du pignon

4.3 Profils conjugués en couple

Ce paragraphe expose la dérivation d'équations pour la détermination de profils dit *conjugués en couple*. Par là on entend que la transmission respectera une condition sur le rapport des couples, et non plus une condition cinématique. Si la distinction n'est pas importante dans les systèmes conservatifs, les rapports de transmission et de couples étant équivalents, elle le devient en présence de frottement au point de contact.

4.3.1 Equations générales

On cherche à établir une méthode et les équations correspondantes pour déterminer, d'après un profil connu, porté par la roue menante et décrit par $\mathbf{r}_1(u, \theta)$ le profil de la roue menée \mathbf{r}_2 en imposant non pas un rapport de transmission comme au paragraphe précédent, mais un rapport de couples (noté j), afin d'obtenir des profils conjugués en couple. Contrairement à la conjugaison cinématique, le sens d'engrènement est maintenant primordial.

Comme dans le paragraphe 4.2.2, il s'agit de décrire le contact entre les profils :

$$\mathbf{r}_2(u, \theta, \phi_1, \phi_2) = \mathbf{M}_{21}(\phi_1, \phi_2) \mathbf{r}_1(u, \theta)$$

Équation 4.12

Avec \mathbf{M}_{21} la matrice de passage entre les repères, et ϕ_i la rotation de la roue i . Mathématiquement, à ce stade $\mathbf{r}_2(u, \theta, \phi_1, \phi_2)$ est une famille de familles de courbes. Une seule équation supplémentaire ne suffit plus pour déterminer quelle est la surface solution parmi cette famille de familles. On reprend l'Équation 4.5 du paragraphe précédent comme première équation:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \right) \cdot \mathbf{v}_{12} = 0$$

Équation 4.13

On utilise ensuite un bilan de puissance pour déterminer une seconde équation qui définisse \mathbf{r}_2

$$\underbrace{\mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1}_{\text{Entrée}} - \underbrace{\mathbf{C}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2}_{\text{Sortie}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{frot}} \cdot \mathbf{v}_{12}}_{\text{Pertes}} = 0$$

Équation 4.14

avec \mathbf{C}_i le couple de la roue i , et ω_i la vitesse de rotation de la roue i et \mathbf{F}_{frot} la force de frottement au contact. Le rapport de couple est défini comme :

$$j = \frac{C_2}{C_1}$$

Équation 4.15

avec $C_i = \|\mathbf{C}_i\|$

Le modèle de frottement utilisé est celui de Coulomb, avec un coefficient de frottement constant noté μ . En détaillant les pertes on obtient:

$$\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v}_{12} = \underbrace{\mu \|\mathbf{F}_n\|}_{\text{Intensité force de frottement}} \cdot \underbrace{\frac{-\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|}}_{\text{Direction force de frottement}} \cdot \underbrace{\mathbf{v}_{12}}_{\text{Vitesse du point d'application}} = -\mu \|\mathbf{F}_n\| \|\mathbf{v}_{12}\|$$

Équation 4.16

avec \mathbf{F}_n la force normale au point de contact.

Les différents termes peuvent être réécrits et exprimés uniquement à partir de grandeurs géométriques, ce qui donne:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \|\mathbf{F}_n\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{n}) + \|\mathbf{F}_f\| \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \frac{-\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right)$$

Équation 4.17

avec \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à la surface au point de contact

$$\|\mathbf{C}_1\| = \|\mathbf{F}_n\| \left\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{n}) + \mu \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \frac{-\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right) \right\|$$

Équation 4.18

Il est également possible d'écrire que :

$$\mathbf{C}_i \cdot \omega_i = \|\mathbf{C}_i\| \|\omega_i\| = C_i \omega_i$$

Équation 4.19

car l'axe de rotation est colinéaire au couple transmis.

L'Équation 4.14 du bilan de puissance peut alors être notée:

$$C_1 \omega_1 = C_2 \omega_2 + \mu \frac{C_1}{\left\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{n}) + \mu \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1 \times \frac{-\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right) \right\|} \|\mathbf{v}_{12}\|$$

Équation 4.20

qui en utilisant l'Équation 4.15 peut s'écrire :

$$\omega_1 = j\omega_2 + \mu \frac{\|\mathbf{v}_{12}\|}{\left\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n}) + \mu \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \frac{-\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} \right) \right\|}}$$

Équation 4.21

Comme l'orientation des axes de rotation des roues est connue (notée \mathbf{a}_i) et que notre problème n'est pas directement lié à la norme de la vitesse ω_1 , il est alors choisi de normaliser le problème et d'introduire le rapport de transmission instantané $i = \frac{1}{m_{21}}$. En introduisant également dans l'Équation 4.21, l'Équation 4.11, on obtient :

$$i = j + \mu \frac{\|[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)\|}{\left\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n}) + \mu \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times -\frac{[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)}{\|[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)\|} \right) \right\|}}$$

Équation 4.22

4.3.2 Spécialisation au cas des engrenages plans à axes parallèles

Le profil des dents de nombreux engrenages utilisés couramment est défini par des courbes planes et les axes de rotations associés sont perpendiculaires au plan de ces courbes. On parle alors de transmission plane dont l'analyse peut être simplifiée en comparaison des équations du paragraphe précédent en éliminant la troisième dimension (axe z), ce qui rendra la recherche des profils plus simple.

Pour effectuer cette spécialisation, on introduit les différentes variables suivantes:

- $i = \frac{\omega_1(\phi_1)}{\omega_2(\phi_2)}$, le rapport de transmission instantané
- $\bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$, le rapport de transmission moyen (moyenné sur un pas si on ne parle pas d'engrenage circulaire)
- $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$, le profil bidimensionnel d'entrée
- \mathbf{E} , l'entraxe
- m , le module

Et on rappelle que $j = \frac{c_2}{c_1}$, le rapport de couple

On commence par simplifier l'Équation 4.13, en la remplaçant par une équation bidimensionnelle, basée sur le théorème de Lewis (voir §1.6.3.5), et également décrite dans la référence [9]. Celle-ci exprime plus simplement la condition d'engrènement au contact, mais s'applique uniquement aux engrènements à axes parallèles ou concourants. On la présente ci-après :

$$\frac{c_x - r_x}{n_x} = \frac{c_y - r_y}{n_y}$$

Équation 4.23

avec:

$c_{x,y}$: la composante x ou y du pôle

$n_{x,y}$: la composante x ou y de la normale au profil au point de contact

$r_{x,y}$: la composante x ou y du profil au point de contact.

L'équation peut être réécrite avec i et E , car le pôle d'un engrenage plan se situe forcément sur la ligne des centres. En utilisant les mêmes repères que précédemment on obtient $c_x = 0$, et c_y correspond alors à

$$c_y = \frac{E}{1+i}$$

Équation 4.24

où l'on a fait usage de la relation

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{E - r_1}{r_1} = \frac{E}{r_1} - 1 = \frac{E}{c_y} - 1$$

Équation 4.25

L'Équation 4.23 devient alors :

$$\frac{\frac{E}{1+i} - r_y}{n_y} + \frac{r_x}{n_x} = 0$$

Équation 4.26

On effectue une démarche similaire sur l'Équation 4.22 en commençant par simplifier son numérateur.

On écrit les vecteurs unitaires définissant la direction des vecteurs rotations des roues 1 et 2 respectivement comme $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ici le signe des composantes des vecteurs indiquent le sens de rotation. La

position relative des centres des deux roues est donnée par le vecteur entraxe $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$ où E une constante (mouvement plan autour d'axes de rotations parallèles) Il est alors possible d'écrire la norme du numérateur du membre de droite de l'Equation 4.22 comme:

$$\|[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)\| = \sqrt{E(E - 2r_y(1+i)) + (1+i)^2\|\mathbf{r}_1\|^2}$$

Équation 4.27

Le dénominateur de l'Équation 4.22 peut également être simplifié. Pour simplifier l'écriture, on adopte temporairement la substitution suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = [(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)$$

Équation 4.28

Le dénominateur se note alors :

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n}) + \mu \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times -\frac{[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)}{\|[(\mathbf{a}_2 - i\mathbf{a}_1) \times \mathbf{r}_1] + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}_2)\|} \right) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right) \right\| \end{aligned}$$

Équation 4.29

Un pas supplémentaire peut être fait en utilisant la norme du produit vectoriel comme $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \widehat{ab}$

$$\left\| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right) \right\| = \|\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1\| \left\| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right\| \sin \alpha$$

Équation 4.30

Avec α l'angle entre les vecteurs $(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1)$ et $(\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|})$.

Les deux normes peuvent encore être simplifiées. La matrice de passage $\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)$ ne représentant qu'une rotation pure, elle n'influence pas la norme du vecteur qui subit sa transformation. De plus, de par la physique du système, le vecteur $\boldsymbol{\beta}$, qui possède la même direction et le même sens que la vitesse de glissement, est forcément perpendiculaire à la normale au profil \mathbf{n} . Cette propriété étant garantie par l'équation de Lewis (Équation 4.23), la simplification peut être effectuée sans provoquer de perte d'information. Avec ces considérations, les normes deviennent donc:

$$\|\mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_1\| = r_1$$

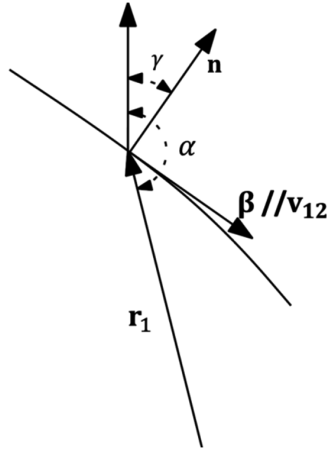
Équation 4.31

et

$$\left\| \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right\| = \sqrt{1 + \mu^2}$$

Équation 4.32

Il reste encore à déterminer l'angle α . Puisque le domaine d'étude est le plan, il est possible d'écrire α comme la somme de deux angles (voir Figure 4.4)


 Figure 4.4: Illustration de l'angle α

$$\alpha = \widehat{r_1 n} + \gamma$$

Équation 4.33

Avec:

$\widehat{r_1 n}$ l'angle formé par le vecteur position du point du profil concerné et la normale au profil \mathbf{n} (connu)

γ l'angle entre la normale \mathbf{n} et le vecteur $\left(M_{f1}(\phi_1)\mathbf{n} - \mu \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \right)$, qu'il reste à déterminer. Dans la Figure 4.4, on voit que γ peut s'exprimer trigonométriquement comme:

$$\tan \gamma = \mu \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|}{\|\mathbf{n}\|} = \pm \mu$$

Équation 4.34

On voit donc que γ n'est rien d'autre que l'angle de frottement associé au coefficient de frottement coulombien μ .

A ce point du développement, l'Équation 4.22 s'écrit:

$$i = j + \frac{\mu}{r_1 \sqrt{1 + \mu^2 \sin(\widehat{r_1 n} \pm \gamma)}} \sqrt{E \left(E - 2r_y(1 + i) \right) + (1 + i)^2 \|r_1\|^2}$$

Équation 4.35

On simplifie encore l'équation en mettant en évidence le coefficient de frottement μ au moyen d'identités trigonométriques:

$$\sqrt{1 + \mu^2} \sin(\widehat{r_1 n} \pm \underbrace{\gamma}_{\arctan \mu}) = \sin \widehat{r_1 n} \pm \mu \cos \widehat{r_1 n}$$

Équation 4.36

La racine $\sqrt{E(E - 2r_y(1+i)) + (1+i)^2\|r_1\|^2}$ peut également être simplifiée en procédant comme suit. Pour des raisons constructives, l'entraxe (E) est fixé à la valeur utilisée pour l'analyse de la conjugaison cinématique:

$$E = \frac{mz_1(1+i)}{2}$$

Équation 4.37

Dans un souci de clarté, et pour marquer également l'indépendance des équations de l'échelle, nous adoptons l'entraxe normalisé ($E_n = \frac{E}{m}$) et le profil normalisé ($r_{1n} = (r_{nx}; r_{ny}) = \frac{r_1}{m}$), pour la suite du développement.

En utilisant l'identité décrite à l'Équation 4.36 et en mettant en évidence la valeur $\frac{z_1(1+i)}{2}$, l'Équation 4.35 devient:

$$i = j + \frac{\mu}{\sin \widehat{r_1 n} \pm \mu \cos \widehat{r_1 n}} \frac{z_1(1+i)}{2r_{1n}} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{1+i}{z_1(1+i)} r_{ny}\right)^2 + 4 \left(\frac{1+i}{z_1(1+i)}\right)^2 r_{nx}^2}$$

Équation 4.38

En additionnant 1 à chaque membre puis en divisant l'ensemble de l'équation par la valeur $(1+i)$, l'Équation 4.38 s'écrit alors:

$$\frac{1+j}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{\mu z_1}{2r_{1n}(\sin \widehat{r_1 n} \pm \mu \cos \widehat{r_1 n})} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{1+i}{z_1(1+i)} r_{ny}\right)^2 + 4 \left(\frac{1+i}{z_1(1+i)}\right)^2 r_{nx}^2}$$

Équation 4.39

Si on effectue également la substitution de l'entraxe dans l'Équation 4.26, elle devient:

$$\frac{1+i}{1+i} = \frac{n_x z_1}{2(r_{ny} n_x - r_{nx} n_y)}$$

Équation 4.40

L'Équation 4.40 est maintenant substituée dans l'Équation 4.39 de conjugaison en couple. La simplification de la racine se fait de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{1+i}{z_1(1+i)} r_{ny}\right)^2 + 4 \left(\frac{1+i}{z_1(1+i)}\right)^2 r_{nx}^2} &= \sqrt{\left(1 - \frac{n_x r_{ny}}{(r_{ny} n_x - r_{nx} n_y)}\right)^2 + \left(\frac{n_x r_{nx}}{(r_{ny} n_x - r_{nx} n_y)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{r_{nx}^2 (n_x^2 + n_y^2)}{(r_{ny} n_x - r_{nx} n_y)^2}} \\ &\stackrel{n_x^2 + n_y^2 = 1}{=} \frac{|r_{nx}|}{|r_{ny} n_x - r_{nx} n_y|} \end{aligned}$$

Équation 4.41

L'équation de conjugaison en couple s'écrit finalement:

$$\frac{1+j}{1+\bar{i}} = \frac{n_x z_1}{2(r_{ny} n_x - r_{nx} n_y)} - \frac{\mu z_1}{2r_{1n}(\sin \widehat{r_1 n} \pm \mu \cos \widehat{r_1 n})} \frac{|r_{nx}|}{|r_{ny} n_x - r_{nx} n_y|}$$

Équation 4.42

L'Équation 4.40 et l'Équation 4.42 permettent alors de calculer un profil conjugué en couple en deux dimensions.

4.3.3 Discussion des équations obtenues

L'Équation 4.13 et l'Équation 4.22 (Équation 4.40 et Équation 4.42, dans le cas bidimensionnel) donnent pour chaque position de la roue menante (r_1), quel est le point de contact (donc la valeur des abscisses curvilignes), ainsi que la position de la roue menée, via le rapport de transmission instantané i . Elles permettent donc de déterminer un profil qui fournira un couple $C_2 = jC_1$, avec j imposé. Contrairement au conjugué cinématique, le fait d'imposer le rapport de couple ne permet pas de garantir l'engrènement. La condition nécessaire pour permettre l'engrènement de deux roues dentées (qui ont chacune un nombre entier de dents) est d'assurer que la rotation d'un pas angulaire de la roue menante (noté p_1), provoque une rotation d'un pas angulaire de la roue menée (noté p_2). Si l'on considère le rapport de transmission comme une fonction de l'angle de rotation de la menante ($i = i(\phi_1)$), alors on a:

$$p_2 = \frac{2\pi}{z_2} = \int_{\phi_1}^{\phi_1+p_1} \frac{1}{i} d\phi$$

Équation 4.43

Lors d'un engrènement de profils conjugués cinématiques à rapport constant, $i(\phi_1) = cst = \frac{z_2}{z_1}$, l'Équation 4.43 devient alors

$$p_2 = \int_{\phi_1}^{\phi_1+p_1} \frac{1}{i} d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_1+p_1} \frac{z_1}{z_2} d\phi = \frac{z_1}{z_2} p_1$$

Équation 4.44

L'Équation 4.44 correspond à la relation entre les pas angulaires des engrenages en contact, et doit être respectée, quel que soit l'engrenage considéré, pour qu'un engrenage puisse être physiquement réalisé. Les profils d'engrenage déterminés par conjugaison en couple doivent donc également respecter l'Équation 4.43, ce qui n'est pas assuré a priori.

4.3.4 Note sur la résolution

La résolution des équations va être largement discutée dans le chapitre suivant. On précise toutefois que la résolution de la version bidimensionnelle est plus simple à appréhender, car l'équation énergétique (Équation 4.42) liant la géométrie au rapport de couple, n'est plus directement liée avec l'équation régissant la non-interpénétration des profils (Équation 4.40) qui est finalement une équation cinématique. On peut donc résoudre les équations l'une après l'autre, contrairement au cas tridimensionnel dont la résolution des équations (Équation 4.13 et Équation 4.22) doit se faire simultanément.

Ces équations ne permettent malheureusement pas de calculer directement une solution de roue dentée physiquement réalisable.

L'explication tient dans la forme des équations. Celles-ci permettent le calcul d'une came (r_2) qui respecte un rapport de couple(j), compte tenu d'une première came (r_1), d'un coefficient de frottement (μ), et de la position relative des cames entre elles (E), mais elles ne lient pas cette (ces) came(s) à un engrenage.

Le lien entre une came et un engrenage circulaire se fait via le développement des dents sur la circonférence du cercle de la roue et du pignon. Chacune de ces dents est une came, identique à ses voisines, et toutes sont disposées de manière régulière autour d'un axe, l'axe de rotation. Si l'on désire obtenir un couple de roues dites conjuguées cinématiques, alors chaque couple de cames (ou dents) en contact, doit respecter un rapport cinématique prescrit dont la moyenne ne peut pas différer du rapport de transmission moyen \bar{i} , qui, pour des raisons évidentes, correspond au rapport du nombre de dents des engrenages en contact.

Le lien dent-came, ainsi que le respect de l'Équation 4.44 (condition nécessaire bien qu'insuffisante) impose donc le rapport de transmission cinématique moyen (\bar{i}), mais pas le rapport de couple.

4.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les équations mises en avant par Litvin [6] pour déterminer, au moyen de la géométrie différentielle, un profil respectant une loi cinématique ($m_{21}(\phi_1) = \frac{1}{i(\phi_1)}$) constante ou non, d'après un autre profil imposé.

On a ensuite présenté de quelle manière ces équations pouvaient être complétées par une équation énergétique afin de répondre à d'autres critères. L'ensemble de ces équations permettent le calcul de profils dits « conjugués en couple ». C'est-à-dire qu'il est possible, grâce à la résolution de ces équations, de déterminer un couple de profils respectant une condition de couple, et non plus une condition cinématique.

Toutefois l'adjonction de cette équation nous ramène à un problème fondamental, passé sous silence dans la plupart des ouvrages car implicitement résolu par la conjugaison cinématique, l'engrènement des dents entre elles. Malheureusement la levée d'un respect strict d'une condition cinématique ne permet plus de satisfaire *à priori* l'engrènement.

On verra dans le chapitre suivant comment ce problème peut être abordé et résolu pour malgré tout permettre le calcul de profils conjugués en couple fonctionnels.

Chapitre 5 Résolution des équations de conjugaison

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente la méthode de résolution numérique des équations présentées au Chapitre 4. On se concentre sur la résolution des équations bidimensionnelles.

Pour rappel, on impose un profil d'entrée (r_1), un coefficient de frottement (μ), un rapport de transmission moyen (\bar{i}) ou de façon équivalente un nombre de dents pour chaque roue de l'engrenage (z_1, z_2). La position des roues de l'engrenage, c'est-à-dire leur entraxe (E), est définie par les nombres de dents.

On veut calculer le profil mené (r_2) de façon à obtenir un rapport de couple (j) constant. On précise que notre intérêt n'est pas nécessairement la valeur du rapport de couple en elle-même.

La difficulté ici est la détermination itérative du rapport de couple, dont la valeur n'a pas d'importance pour autant qu'elle reste constante, mais qui impose le rapport de transmission moyen (\bar{i}). On doit donc trouver le rapport de couple (j) qui satisfasse le rapport cinématique moyen déterminé par le rapport du nombre de dents. Le rapport de transmission instantané (i) variera lui durant toute la phase d'engrènement et sera toujours supérieur au rapport de couple, sauf lorsque le point de contact se trouvera sur la ligne des centres. Dans cette position la vitesse relative de glissement entre les deux dents sera nulle et le rapport de transmission deviendra égal au rapport de couple.

Dans les paragraphes suivants on explique de quelle manière déterminer une valeur de rapport de couple permettant l'engrènement, on décrit quelles sont les stratégies mises en place pour obtenir cette valeur (on verra que la solution n'est pas unique), et on explique comment reconstruire le profil conjugué en couple une fois que la valeur du rapport (j) a été déterminée.

5.2 Remarques générales sur la conception des systèmes mécaniques

Pour bien comprendre le problème auquel nous allons être confrontés, on se permet quelques remarques générales sur la conception des systèmes mécaniques.

La plupart des systèmes mécaniques se construisent d'abord sur des considérations cinématiques qui impliquent une certaine géométrie, elle-même affinée sur la base de considérations statiques et/ou dynamiques. On a donc, généralement, la géométrie générale avant de connaître les performances statiques et dynamiques. L'aspect dynamique n'est pas abordé dans ce travail, mais on traite par contre de statique et de cinématique sous forme de rapport de couple et de rapport de transmission.

Le cas qui nous intéresse, la conjugaison en couple, se distingue des cas de conception mécanique classique en ce que l'on souhaite déterminer la géométrie du système non pas en invoquant un critère cinématique, mais plutôt un critère statique. Bien que cette approche eusse été tentée lors des multiples essais qui ont précédé la démarche présentée ci-dessous, on a été forcé de constater que l'ordre cinématique-statique-dynamique et les multiples itérations nécessaires à la conception d'un système doivent également être respectés dans notre cas.

Ainsi la géométrie générale doit être décidée avant toute application des concepts de conjugaison. On détermine donc la cinématique globale, c'est-à-dire le rapport de transmission moyen (\bar{i}) qui définit une partie de la géométrie générale en imposant les nombres de dents des roues (z_1, z_2) et donc les pas (p_1, p_2). Si on parle d'engrenages circulaires, ce qui est notre cas, alors ce rapport de transmission moyen s'applique à tous les pas de l'engrenage, ce qui impose la disposition des dents sur les roues, et donc la géométrie générale. Ces éléments mis en place, on peut alors commencer à traiter la géométrie des profils. Si on considère une conjugaison cinématique, alors le critère cinématique s'étend à l'ensemble des points de contact et dépend d'une loi connue qui permet de décrire l'ensemble de la géométrie. Si par contre on considère une conjugaison en couple, alors on parle d'un élément qui ne dépend pas de la cinématique, mais qui va décrire la géométrie des profils. Cette géométrie devra par contre respecter la géométrie générale, donc la cinématique globale décrite par le rapport de transmission moyen.

Toutefois, lors de l'établissement de profils conjugués en couple, on rappelle que l'élément intéressant est la constance du rapport de couple, et non sa valeur, et qu'il est par conséquent envisageable de trouver plusieurs valeurs de ce rapport permettant de conserver la géométrie générale.

Malheureusement, la forme des équations présentées au chapitre précédent nécessite de connaître la valeur du rapport de couple (j) pour pouvoir déterminer la géométrie des profils, et donc la cinématique. C'est uniquement à ce moment-là qu'on pourra déterminer si on respecte la géométrie générale, et donc si j permet de respecter \bar{i} . On effectue ici la première itération entre statique et cinématique. On peut déjà se rendre compte qu'on risque d'effectuer un grand-nombre d'itérations entre statique et cinématique, donc entre j et \bar{i} . C'est cette procédure et les techniques utilisées pour déterminer j que l'on décrit dans les paragraphes suivants.

5.3 Recherche du rapport de couple j

Le rapport de transmission moyen (\bar{i}) est fixé a priori et correspond à un impératif de fonctionnement. Le rapport de couple par contre n'y est pas lié directement.

Pour pouvoir construire un engrenage, il faut déterminer le rapport de couple (j) qui permette de satisfaire le rapport cinématique moyen (\bar{i}) pour chaque couple de dents.

Pour réaliser cette condition, il faut satisfaire l'équation suivante :

$$\bar{i} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{p_1} \int_{\phi_1}^{\phi_1+p_1} i(\phi, j) d\phi$$

Équation 5.1

pour j donné.

Mais le lien entre i et j n'est pas direct, et nécessite le calcul du point de contact pour chaque position ϕ de l'engrenage. Pour mieux comprendre ce problème on peut l'exprimer en écrivant $i = i(\phi, u(j, \phi))$, avec u l'abscisse curviligne utilisée pour décrire le profil r_1 dans le cas plan.

La première étape dans la recherche d'une solution est de résoudre, pour chaque position, l'équation de conjugaison en couple (Équation 4.42) qui nous donnera le point de contact et qui permettra de calculer le rapport de transmission instantané.

Concrètement, on utilise une routine informatique (également élaborée sous Matlab) pour effectuer ces calculs. Les instructions présentent les pas suivants :

1. Choisir un pas de calcul $\Delta\phi$, un angle de départ ϕ^0 , un angle de fin ϕ^f en respectant $\phi^f > \phi^0 + p_1$, $\Delta\phi = \frac{p_1}{m}$ et $\phi^f = f \cdot \Delta\phi + \phi^0$
 - a. Déterminer la valeur u^n en résolvant l'équation de conjugaison en couple (Équation 4.42) avec $n \in [1, f]$, n étant le numéro de l'itération
 - b. Calculer le rapport de transmission instantané $i^n(\phi^n, u^n)$ au moyen de l'Équation 4.40
 - c. Stocker i^n
 - d. Incrémenter $\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta\phi$
 - e. Retourner à 1.a. tant que $\phi^{n+1} < \phi^f$, sinon passer au point 2.
2. Calculer les différents \bar{i}

Un rapport de couple (j) donné aura donc plusieurs solutions pour \bar{i} (voir Figure 5.1) selon le placement du domaine d'intégration $[\phi^a, \phi^{a+m}]$ entre ϕ^0 et ϕ^f .

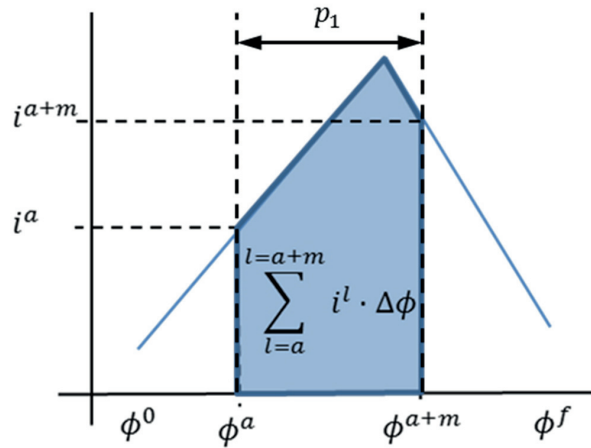


Figure 5.1: Illustration du calcul de \bar{i}^a

Une illustration de ces étapes est représentée à la Figure 5.2

Concrètement, si le profil calculé selon le rapport de couple proposé possède une solution de rapport de transmission moyen satisfaisant l'Équation 5.1, alors ce rapport de couple est une solution du problème.

5.4 Limites géométriques et énergétiques de validité

La discussion de ce paragraphe porte sur les limites de la valeur du rapport de couple (j).

Pour faciliter la résolution du problème et proposer une valeur de rapport de couple qui permette un engrènement correct avec le profil proposé comme profil d'entrée, différentes limites, ayant différentes interprétations physiques ont été définies.

Pour illustrer la discussion, un exemple concret identique pour tous les paragraphes a été choisi. Il s'agit d'un engrènement à roue menante de 80 dents à module 1 contre un pignon à 40 dents, et le profil de départ est une développante de cercle avec angle de pression de 20° .

5.4.1 Rappel : grandeurs principales

$i(\phi) = \frac{\omega_1(\phi)}{\omega_2(\phi)}$: le rapport de transmission instantané

$\bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$: le rapport de transmission moyen, qui est également le rapport des nombres de dents

$j = \frac{c_2}{c_1}$: le rapport de couple (imposé constant dans le cas présent)

Conséquences :

$\eta = \frac{j}{i(\phi)}$: le rendement instantané

$\eta_p = \frac{\int_{\phi_1}^{\phi_1+p} j d\phi}{\int_{\phi_1}^{\phi_1+p} i(\phi) d\phi}$: le rendement moyenné sur un pas (p)

$\bar{\eta} = \frac{j}{\bar{i}}$: le rendement moyen

5.4.2 Limites énergétiques

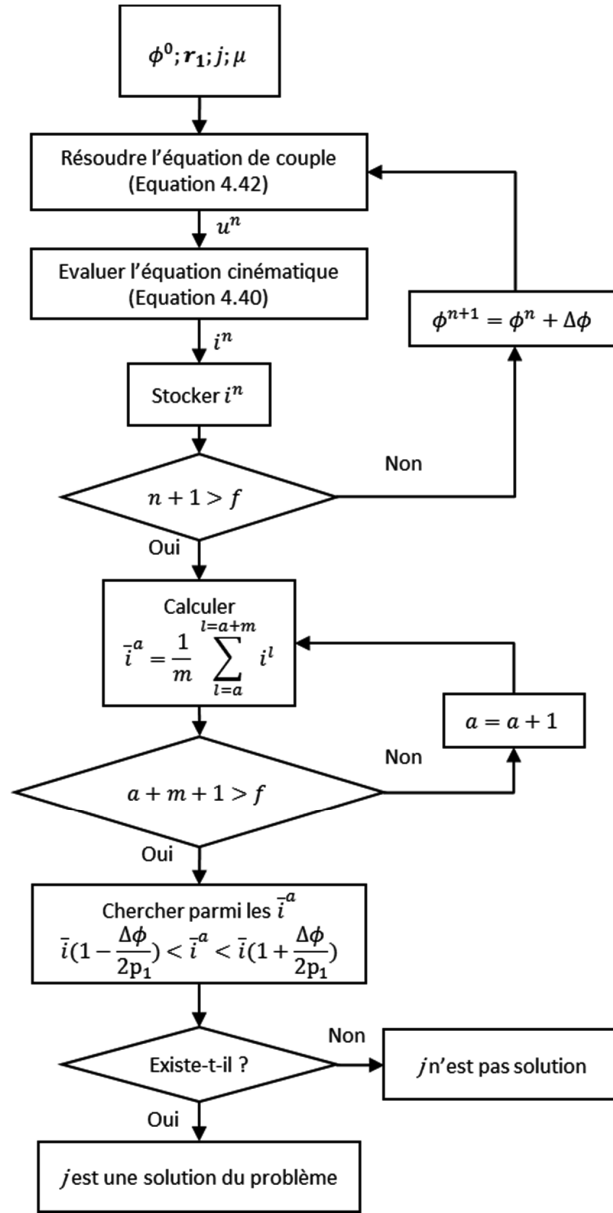
D'une manière générale, les limites énergétiques constituent les limites supérieures envisageables pour le rapport de couple. Elles majorent le problème de la recherche du rapport de couple.

5.4.2.1 Limite énergétique globale

Le système « engrenage » ne peut transmettre de l'énergie d'un axe à un autre avec un rendement supérieur à 1.

Donc $\bar{\eta} \leq 1$, ce qui implique $j \leq \bar{i}$

Dans notre exemple, $j = j_{max} \leq \bar{i} = \frac{40}{80} = 0.5$


 Figure 5.2: Schéma d'évaluation de j

5.4.2.2 Limite énergétique locale

Une paire de dent ne peut avoir un rendement supérieur à 1.

Donc $\eta_p \leq 1$, ce qui implique $\int_{\phi_1}^{\phi_1+p} j \, d\phi \leq \int_{\phi_1}^{\phi_1+p} i(\phi) \, d\phi$

Dans le cas d'engrenages circulaires (ce qui est notre cas) la limite énergétique locale est identique à la limite globale.

5.4.2.3 Limite énergétique restreinte

Contrairement aux limites précédentes, la limite énergétique restreinte est dépendante du profil d'entrée utilisé.

Pour la déterminer il faut résoudre les équations de conjugaison en couple. La limite énergétique restreinte correspond au rendement moyen ($\bar{\eta}$) maximum envisageable pour le cas étudié.

5.4.2.4 Calcul de la limite énergétique restreinte

Le calcul de cette grandeur est réalisé en résolvant le problème de conjugaison en couple présenté au §5.3, puis en déterminant la valeur de j la plus élevée fournissant un profil conjugué dont l'engrènement satisfait la condition de pas (Équation 5.1).

Dans notre exemple, la valeur de rapport de couple à rendement moyen maximum est de $j = j_+ = 0.494$

5.4.2.5 Implications cinématiques et géométriques

Si le rapport de couple choisi pour la conception d'un engrenage est supérieur à la limite restreinte, l'engrènement n'est pas possible. La condition de pas ne peut être satisfaite et l'engrènement ne pourra pas se faire.

5.4.3 Limites géométriques

D'une manière générale, les limites géométriques constituent les limites inférieures. Elles minorent le problème de la recherche du rapport de couple.

5.4.3.1 Limite géométrique globale

Pour fonctionner, une paire d'engrenage doit éviter les interférences. Il faut que la géométrie des dents permette aux roues de tourner sans blocage. Globalement, en faisant référence à la Figure 5.3:

1. La hauteur du pied de dent doit être plus grande que la hauteur de la tête de dent $h_a < c$
2. La largeur de la dent doit être plus faible que le creux entre deux dents $e < v$

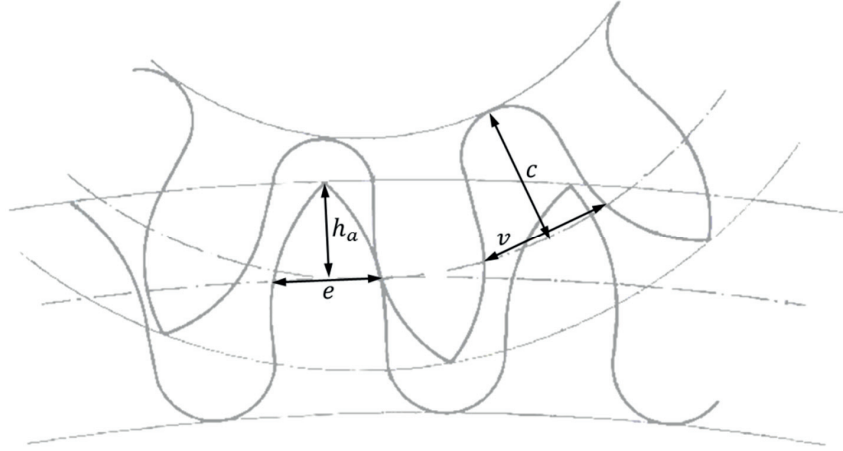


Figure 5.3: Illustration des impératifs de fonctionnement géométrique globaux

5.4.3.2 Limite géométrique locale

La géométrie globale du profil intervient dans le calcul de cette limite. Plus précisément, on doit connaître la hauteur de la dent. Il est alors possible de calculer le rapport de couple (j) minimum envisageable, quelques soient les conditions d'engrènement.

Le rapport de couple et le rapport de transmission sont identiques et maximums lorsque le point de contact entre deux dents se situe sur la ligne des centres (à cet endroit la vitesse de glissement est nulle et le rendement vaut 1, quelle que soit la valeur du coefficient de frottement). L'entraxe et la hauteur de dent étant fixés à priori, il est possible de calculer le rapport de transmission (i) minimum atteignable (sans tenir compte du coefficient de frottement), et donc la valeur minimum du rapport de couple (j).

Pour notre exemple, la hauteur de tête de dent (du profil d'entrée) $h_a = 1$:

$$\begin{aligned}
 j_{\min} = i_{\min} &= \frac{\omega_1(\phi)}{\omega_2(\phi)} \bigg|_{\substack{\text{Évalué sur} \\ \text{la ligne} \\ \text{des centres}}} = \frac{\min(r_2)}{\max(r_1)} = \frac{E - \max(r_1)}{\max(r_1)} = \frac{m \frac{z_1 + z_2}{2} - \left(\frac{m z_1}{2} + h_a\right)}{\left(\frac{m z_1}{2} + h_a\right)} \\
 &= \frac{\frac{80 + 40}{2} - \left(\frac{80}{2} + 1\right)}{\frac{80}{2} + 1} = \frac{19}{41} = 0.463
 \end{aligned}$$

5.4.3.3 Limite géométrique restreinte

La limite géométrique restreinte correspond à la valeur du rapport de couple minimum pour lequel un profil conjugué peut être calculé. S'il est qualifié de limite géométrique restreinte, c'est qu'il ne dépend pas directement de la courbe du profil d'entrée, mais des limitations imposées par la construction, à l'image de la limite géométrique locale.

5.4.3.4 Calcul de la limite géométrique restreinte

Le calcul de cette grandeur est réalisé en résolvant le problème de conjugaison en couple, puis en déterminant la valeur de j la plus faible fournissant un profil conjugué dont l'engrènement satisfait la condition de pas (Équation 5.1).

Dans notre exemple, la valeur de rapport de couple la plus faible envisageable est de $j = j_- = 0.486$

5.4.3.5 Illustrations des limites

Afin d'illustrer les propos exposés aux paragraphes précédents, on présente la Figure 5.4. Cette figure résume le problème de la recherche des limites restreintes, limitant le domaine des valeurs de rapport de couple permettant de respecter le rapport de transmission moyen. Sur cette figure on observe les limites locales (ici confondues avec les limites globales) permettant de limiter le domaine de recherche de solution. On observe également l'évolution des courbes $j_-(\bar{i})$ et $j_+(\bar{i})$. L'intersection de chacune de ces courbes avec la ligne horizontale $\bar{i} = 0.5$, définit les limites restreintes. Cette figure permet également de voir les valeurs de rapport de transmission moyen envisageables pour un rapport de couple donné. Par exemple, si on observe les intersections des courbes $j_-(\bar{i})$ et $j_+(\bar{i})$ avec la ligne verticale $j = 0.49$, on voit que ce rapport de couple permet de respecter des rapports de transmissions moyens compris entre $0.496 < \bar{i} < 0.502$. Cette constatation signifie que le profil qui serait recréé à partir d'un rapport de couple $j = 0.49$, autorise des erreurs de pas angulaire, et serait donc, à priori, plus tolérant aux erreurs qu'un profil reconstruit à partir de la valeur limite $j = 0.494$, dont les rapports de transmissions moyens sont compris entre $0.5 < \bar{i} < 0.505$, bien que la différence ne soit pas très grande. Toutefois il faut noter qu'un rapport de transmission moyen dont la valeur serait supérieure à celle prescrite, conduirait probablement à un blocage du système, le pas p_2 en découlant devenant plus faible que la valeur attendue.

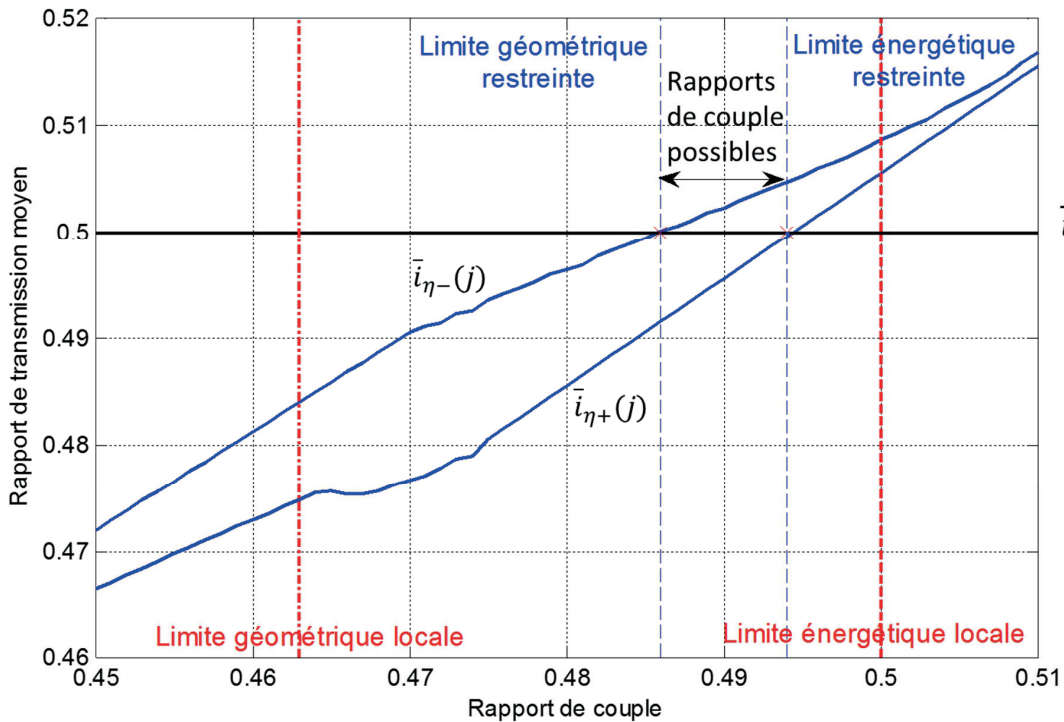


Figure 5.4 : Illustration des limites à la valeur du rapport de couple

5.4.4 Remarque concernant les limites globales et les limites locales

Les limites énergétiques globales et locales ne présentent pas de différence dans le cas qui illustrent notre réflexion. Toutefois la définition de deux limites distinctes a un sens physique et pratique, bien que celui-ci ne soit pas mis en évidence dans notre exemple. Les différences entre limites énergétiques globales et locales prennent sens dans le cas des engrenages non-circulaires (cf. [44] et Figure 5.5), dont le rapport de transmission est différent d'une dent à l'autre. La limite locale étant définie pour un pas, celle-ci sera différente pour chaque couple de dent, alors que la limite globale considère l'ensemble complet de la roue et de ses dents. La conséquence en est une différenciation entre les limites locales et globales qui n'est pas visible sur les engrenages circulaires.

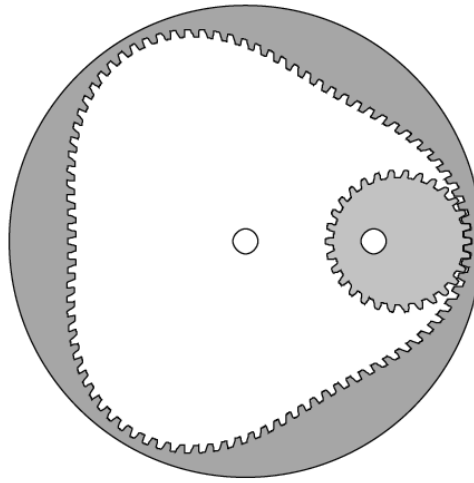


Figure 5.5: Exemple d'engrenage non-circulaire (tiré de [44])

5.4.5 Elargissement du domaine de validité

Dans ce paragraphe, nous cherchons si les limites introduites aux paragraphes précédents pour le rapport de couple peuvent être élargies, soit augmentées pour les limites énergétiques et abaissées pour les limites géométriques, en jouant sur la géométrie des dents en prise et la géométrie générale.

5.4.5.1 Limites énergétiques globale, et locale

Ces limites ne peuvent être relevées, elles ne dépendent ni du profil, ni de la géométrie générale, mais sont des limites intransgressibles, fixées par la thermodynamique.

5.4.5.2 Limite énergétique restreinte

Cette limite peut être relevée en améliorant la géométrie du profil d'entrée, de façon à limiter les pertes de frottement.

5.4.5.3 Limites géométriques globale et restreinte

Ces limites peuvent être repoussées en augmentant la hauteur du pied de dent du profil d'entrée. On peut également modifier l'entraxe.

5.4.6 Méthode numérique de calcul des limites restreintes

Les limites restreintes sont calculées à partir de la résolution successive du problème de conjugaison en couple pour différentes valeurs du rapport de couple (j).

Pour ne pas perdre de temps en calculs successifs inutiles, qui seraient entraînés par une recherche au hasard du rapport de couple, on complète le calcul de conjugaison présenté précédemment par un module de résolution d'équation, basé sur le principe de la méthode de Newton. Ce code de résolution permettra de calculer de manière plus efficace une valeur de rapport de couple correspondant aux limites restreintes. Le même code peut être utilisé pour calculer la limite restreinte géométrique et énergétique, il suffit de changer légèrement la méthode de calcul du rapport de transmission moyen (\bar{i}).

On se contente dans les paragraphes suivants d'expliquer de quelle manière on peut déterminer les limites restreintes, sans s'attarder, pour le moment, sur la méthode de calcul. Cette dernière est présentée au §5.5.

5.4.6.1 Calcul numérique de la limite énergétique restreinte

La limite énergétique restreinte est calculée en recherchant la valeur du rapport de couple associée au profil conjugué en couple fournissant le rendement le plus élevé possible.

Cette sélection se fait lors du choix du rapport de transmission moyen (\bar{i}). En retenant à priori le \bar{i} associé au rendement le plus élevé, on peut créer la courbe $\bar{i}_{\eta+}(j)$, qui permettra de calculer la limite restreinte (voir Figure 5.4).

Concrètement, le code calcule tous les \bar{i} envisageables et retient la valeur la plus faible. C'est celle-ci qui livre le rendement le plus élevé. (Tout ceci est fait indépendamment du respect ou non de la condition de pas.) Cette valeur est alors associée au rapport de couple courant (j), et constitue un point de la courbe $\bar{i}_{\eta+}(j)$.

Le module de résolution d'équation est alors chargé de trouver la valeur de rapport de couple (j) qui satisfera l'équation :

$$\bar{i}_{\eta+}(j) = \bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$$

Équation 5.2

La valeur du rapport de couple ainsi trouvée est notée j_+ , et est appelée *limite énergétique restreinte*.

5.4.6.2 Calcul numérique de la limite géométrique restreinte

La limite géométrique restreinte est calculée en cherchant la valeur du rapport de couple la plus faible qui permettra la construction d'un profil conjugué en couple fonctionnel, donc respectant l'Équation 5.1.

Si elle est nommée « géométrique », c'est parce que la géométrie du profil est la seule condition limitant la valeur minimum que peut prendre le rapport de couple, tout en respectant la condition de pas.

Le calcul de cette valeur se fait également lors du choix du rapport de transmission moyen (\bar{i}). En retenant à priori le \bar{i} qui est associé cette fois au rendement le plus faible, on peut créer la courbe $\bar{i}_{\eta-}(j)$, qui permettra de calculer la limite restreinte.

Concrètement, le code calcule tous les \bar{i} envisageables et cette fois retient la valeur la plus élevée. C'est celle-ci qui conduit au rendement le plus faible. (Toute cette démarche est faite indépendamment du respect ou non de la condition de pas.) Cette valeur est alors associée au rapport de couple courant (j), et constitue un point de la courbe $\bar{i}_{\eta-}(j)$.

Le module de résolution d'équation est alors chargé de trouver la valeur de rapport de couple (j) qui satisfera l'équation :

$$\bar{i}_{\eta-}(j) = \bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$$

Équation 5.3

La valeur ainsi trouvée pour le rapport de couple est notée j_- , et est appelée *limite géométrique restreinte*.

5.4.7 Remarques concernant la recherche du profil

A ce stade du développement, le problème est la recherche d'une valeur du rapport de couple (j). Afin de mieux cerner le problème, on a décrit le domaine d'existence de j , sans pour le moment expliquer exactement les démarches permettant d'obtenir ces valeurs.

Ce qu'il faut comprendre, c'est que bien que le but final soit de déterminer un profil r_2 qui respecte une contrainte de couple, la valeur du rapport de couple est une inconnue du problème, et donc une grandeur à déterminer. C'est dans ce but (la détermination d'une valeur de j) qu'une routine informatique a été développée. Mais plus qu'une valeur, cette routine va déterminer un intervalle de valeurs possibles pour le rapport de couple. N'importe quelle valeur de j dans cet intervalle permettra de construire un profil r_2 qui respectera la condition de pas (Équation 5.1).

5.5 Structure du code de résolution

On présente dans ce paragraphe de quelle manière on calcule l'intervalle de solution de j . On y décrit les entrées nécessaires, les sorties du programme complet, ainsi que les différentes étapes de calcul.

5.5.1 Entrées

1. Profil d'entrée r_1
2. Nombres de dents z_1 et z_2
3. Coefficient de frottement μ

Note : Le module ne fait pas partie des entrées ni des paramètres car on travaille sur des profils normés. L'entraxe n'est pas non plus une entrée du problème, car on souhaite résoudre le cas d'engrenages dont l'entraxe est identique au cas cinématique, et est donc défini par les nombres de dents.

5.5.2 Sorties

1. Limites restreintes
 - a. Géométrie j_-
 - b. Énergétique j_+
2. Proposition de rapport de couple j
3. Vecteur contenant les points formant le profil conjugué r_2 en couple selon la proposition j
4. Vecteur des points de contact en fonctionnement normal
5. Eventuellement : comparaison entre le profil de sortie et une référence fournie.

5.5.3 Paramètres

1. Précision de résolution pour le calcul des points du conjugué
2. Précision de résolution pour la recherche des limites restreintes
3. Nombre de points définissant le profil conjugué en couple

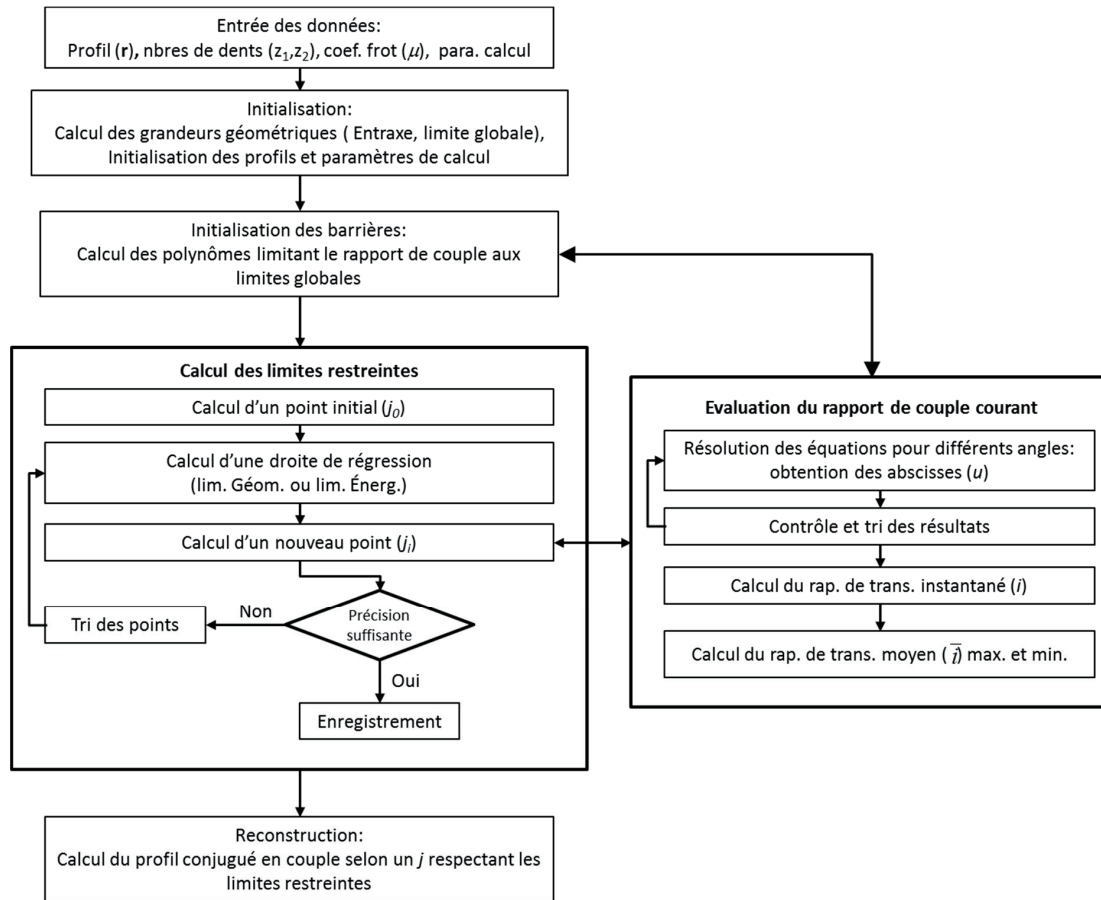


Figure 5.6: Schéma de calcul d'un conjugué en couple

5.5.4 Détail du fonctionnement de l'outil informatique

5.5.4.1 Initialisation

Une fois toutes les données fournies, le calcul des différentes grandeurs principales est effectué, dont notamment les limites géométriques et énergétiques globales. Après avoir déterminé ces valeurs, on met en place dans le code les barrières numériques, afin de permettre une résolution numérique stable et plus rapide.

5.5.4.2 Initialisation des barrières numériques

Les barrières numériques mises en place au niveau des limites globales sont là pour éviter que le calcul des limites restreintes (l'objectif principal du code) ne se fourvoie dans des zones où les solutions sont exclues. Comme la plupart des routines numériques de recherche de solutions d'équations acceptent mal les limites abruptes, on remplacera les droites verticales correspondant aux limites par des courbes limites variant plus progressivement, à l'instar de ce qui se fait en optimisation numérique. Lorsque le code de résolution demandera une évaluation d'un point en dehors des limites de validité du modèle, le point sera évalué sur une courbe différente, en l'occurrence un polynôme, pour rediriger le calcul sur le domaine de validité.

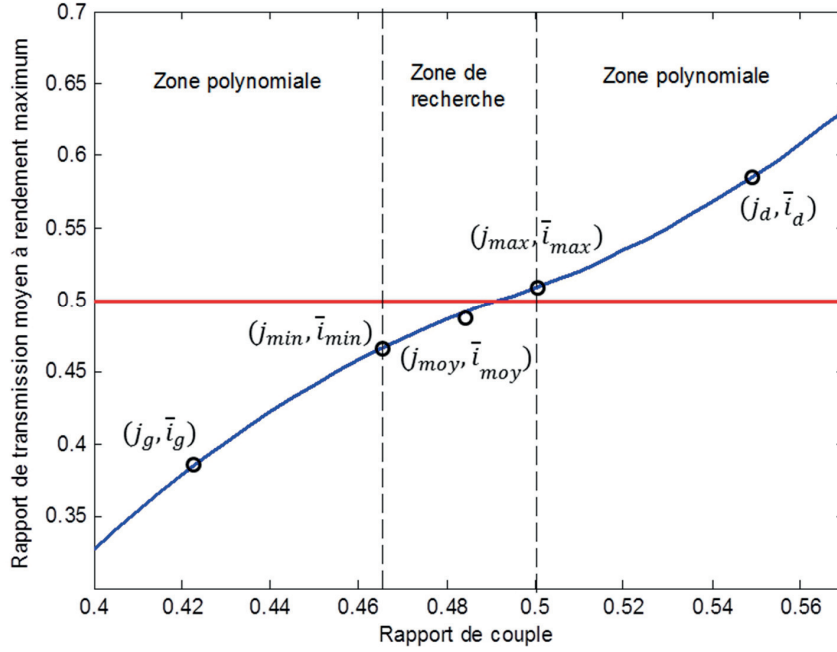


Figure 5.7: Illustration des barrières polynomiales

Pour ce faire, les coefficients des polynômes sont calculés lors de chaque initialisation pour satisfaire les particularités du problème proposé. Les points utilisés pour paramétrer ces barrières ont été choisis comme étant, dans l'ordre croissant :

1. Limite extrême à gauche : $\bar{i}_g = (1 - \alpha)\bar{i}_{min} = p_g(j_g) = p_g((1 - \beta)j_{min})$
2. Limite globale géométrique : $\bar{i}_{min} = p_g(j_{min})$
3. Point central : $\bar{i}_{moy} = \frac{\bar{i}_{max} + \bar{i}_{min}}{2} = p_d(j_{moy}) = p_g(j_{moy})$
4. Limite globale énergétique : $\bar{i}_{max} = p_d(j_{max})$
5. Limite extrême à droite : $\bar{i}_d = (1 + \alpha)\bar{i}_{max} = p_d(j_d) = p_d((1 + \beta)j_{max})$

Les paramètres α et β sont laissés au choix de l'utilisateur.

L'ensemble de ces points permet de déterminer des polynômes de degré 2 autant pour la barrière à gauche (limite locale géométrique limitée par p_g) qu'à droite (limite énergétique limitée par p_d).

Il faut noter que le problème de la recherche de la limite restreinte géométrique est similaire au problème de la recherche de la limite énergétique restreinte, et les barrières sont initialisées de la même manière, mais les différentes valeurs de rapport moyen (\bar{i}_{moy} , \bar{i}_{max} , \bar{i}_{min}) sont différentes. Les polynômes le sont donc également.

5.5.4.3 Evaluation du rapport de couple courant

Cette partie du code permet d'évaluer un rapport de couple (j). Elle va calculer les points de contact satisfaisant le rapport de couple proposé, puis en tirer les rapports de transmissions moyens possibles.

L'évaluation d'un rapport de couple se fait en quatre étapes distinctes :

1. Résolution de l'équation de conjugaison en couple (Équation 4.42) pour plusieurs angles de rotation (ϕ^n , $n \in [1, f]$)
2. Tri, élimination et éventuellement calculs supplémentaires
3. Calcul du rapport de transmission instantané (i^n) pour les points calculés
4. Calcul du rapport de transmission moyen (\bar{i}^a)

5.5.4.3.1 Résolution de l'équation de couple

La résolution de l'équation de conjugaison en couple (Équation 4.42) doit se faire pour plusieurs positions (ϕ^n) du profil d'entrée (r_1). Le nombre de points est un des paramètres de l'utilisateur, ainsi que les positions de départ (ϕ^0) et de fin (ϕ^f). Il est conseillé toutefois de prendre une marge suffisante. Pour les cas testés ici on a choisi de prendre 200 points entre la position de départ définie à $\phi^0 = -1.5$ pas et la position de fin à $\phi^f = +1.5$ pas.

L'équation de conjugaison en couple est ensuite résolue successivement pour toutes les positions avec le module de résolution `fsolve` du logiciel MatLab. Ces résolutions successives permettent d'obtenir les abscisses curvilignes (u^n) satisfaisant le rapport de couple proposé.

5.5.4.3.2 Tris des points

La relative complexité de la résolution de l'équation de couple ne permet pas toujours à l'algorithme de MatLab de converger. Il est très difficile ensuite de dire si la raison est la non-existence de la solution ou le mauvais conditionnement du problème. Pour trancher, les positions (ϕ^n) qui n'ont pas permis de trouver de solution sont recalculés avec d'autres propositions (u^{n0}) de départ.

Si malgré tout aucune solution n'est trouvée, le point est stocké comme « Not a Number » (NaN).

Une fois que tous les angles ont été évalués et que les équations ont été résolues (ou pas), les points NaN en début et fin de rotation du profil d'entrée sont retirés.

Les points NaN esseulés au milieu d'autres points pour lesquels le calcul a convergé sont remplacés par des approximations linéaires, calculées en utilisant les points avoisinants. Ce tri est fait à ce stade pour simplifier la suite des calculs et également la programmation.

5.5.4.3.3 Calcul du rapport de transmission instantané

Les abscisses (u^n) et les positions angulaires (ϕ^n) qui y sont liées permettent le calcul des rapports de transmission instantanés (i^n). Le calcul se fait au moyen de l'Équation 4.40.

Toutes les possibilités sont calculées. Il est alors possible d'obtenir pour un même rapport de couple une infinité de rapport de transmission moyen, dont le nombre est concrètement limité par le nombre de points de calcul demandés. De toutes ces valeurs on n'en retiendra que deux, la valeur maximum et la valeur minimum correspondant respectivement, au cas de la came dont le rendement est le plus mauvais, puis celui de la came au rendement maximum, pour la valeur de couple proposée.

Note : Ce paragraphe peut sembler sans intérêt, puisqu'il explique la recherche de valeurs qui en réalité ne correspondent à rien de concret. Pourquoi retenir des rapports de transmission moyens qui ne correspondent à rien sur des critères de rendement de came ? Il est vrai que ces valeurs en elle-même ne n'ont aucun sens réel, mais elles vont nous permettre de déterminer les limites restreintes.

5.5.4.5 Calcul numérique des limites restreintes

Le calcul des limites restreintes se fait en utilisant un schéma de résolution nommé « quasi-Newton » [39]. Il s'agit d'un schéma similaire à la méthode de Newton (aussi appelée Newton-Raphson), à la différence près que la dérivée de la fonction dont on cherche le zéro est approximée par une droite passant par le point en évaluation et le point calculé précédemment. Cette méthode est utilisée pour le calcul des limites restreintes, car les courbes $\bar{i}_{\eta+}(j)$ et $\bar{i}_{\eta-}(j)$ ne sont pas connues.

Le calcul se fait sur deux fonctions différentes, correspondant aux deux limites restreintes, mais il est en tout point identique pour les deux limites.

5.5.4.5.1 Equations à résoudre

La limite restreinte énergétique se calcule en déterminant la valeur du rapport de couple (j) dont le rapport de transmission moyen à rendement maximum correspond au rapport de transmission moyen global (rapport du nombre des dents).

$$\bar{i}_{\eta+}(j_+) = \bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$$

La limite restreinte géométrique se calcule de manière identique, à la différence près que le rapport de transmission moyen retenu est cette fois-ci celui correspondant au rendement minimum.

$$\bar{i}_{\eta-}(j_-) = \bar{i} = \frac{z_2}{z_1}$$

5.5.4.5.2 Initialisation

L'initialisation de la recherche se fait au moyen des points précédemment calculés lors de l'initialisation des barrières numériques. Les deux premiers points ainsi calculés permettent de calculer la première itération du schéma « quasi-Newton ».

5.5.4.5.3 Schéma quasi-Newton

Le schéma quasi-Newton est expliqué brièvement dans ce paragraphe. Pour plus d'informations, notamment sur la convergence du schéma, le lecteur est prié de se référer à la littérature [39].

Ce schéma reprend, à quelques détails près, l'idée proposée par Newton pour la résolution d'équations.

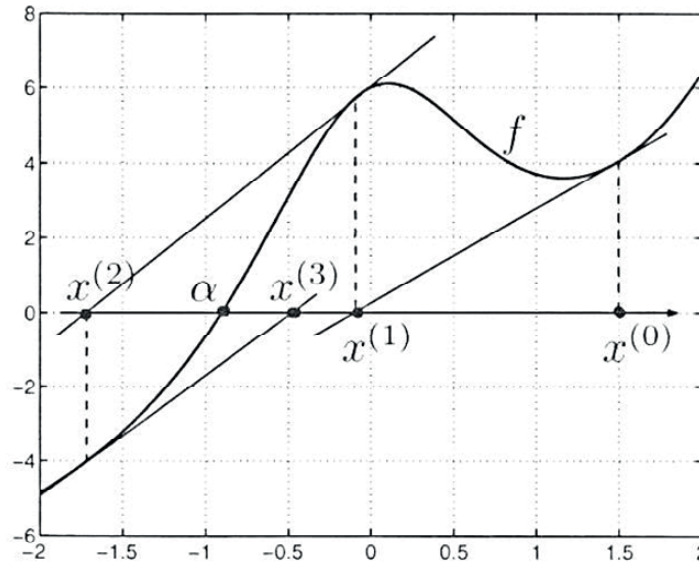


Figure 5.10: Illustration de la méthode de Newton. (α est la solution recherchée, les différents x correspondent aux résultats des itérations, et les droites sont les approximations linéaires de la courbe f calculées à partir de la dérivée de la fonction) (d'après [45])

Une première différence est qu'il est nécessaire d'initialiser ce schéma avec deux points initiaux au lieu d'un pour le schéma traditionnel.

La deuxième différence, dont découle la première, est l'approximation de la dérivée. Dans le schéma traditionnel la dérivée de la fonction (voir Figure 5.10) est calculée de manière analytique, alors que dans le cas présent on se contente d'une approximation formée par deux points de la fonction.

Le principe de la méthode de Newton est d'approximer la fonction dont on recherche le zéro par une équation plus simple qui sera utilisée dans un schéma itératif, permettant d'obtenir une solution en un nombre fini d'itérations. Newton émet l'idée d'utiliser la dérivée de la fonction pour l'approximer par une droite, et de résoudre ainsi une version nettement simplifiée du problème. Dans le cas du schéma quasi-Newton, la dérivée est approchée en calculant une droite formée par les derniers points de calculs. Ce qui donne :

Pour le point de calcul a on procède comme suit:

Initialisation : Calculer deux points quelconques de la fonction dont on cherche les zéros.

1. Calcul de la droite d'approximation au moyen des deux derniers points calculés
2. Calcul du zéro de la droite
3. Evaluation de la fonction au zéro de la droite
4. Calcul de l'erreur
5. Recommencer tant que l'erreur est trop grande

5.5.4.4 Calcul du rapport de transmission moyen

Le calcul du rapport de transmission moyen (\bar{i}^a) se fait en intégrant numériquement les rapports de transmission instantanés (i^n) obtenus à l'étape précédente (voir également §5.3).

Une première partie du calcul se fait à chaque itération n . On intègre (numériquement) chaque pas selon un schéma trapézoïdal [45] (voir Figure 5.8). Ces données sont stockées pour pouvoir être réutilisées.

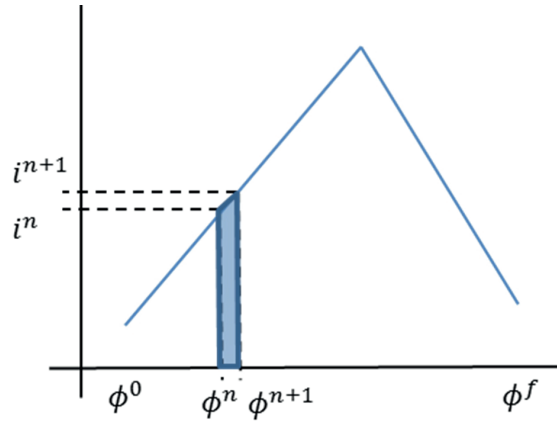


Figure 5.8: Illustration de l'intégration sur un pas

Le calcul du rapport de transmission moyen doit se faire sur un angle entre les points de début et de fin d'intégration correspondant à un pas. Mais comme précisé dans le paragraphe (§5.3), l'angle de début et de fin d'engrènement ne sont pas connus. La seule certitude c'est que ces angles sont distants d'un pas p_1 et d'un nombre de pas de calcul $m < f$, le nombre d'itérations (voir Figure 5.9). Le rapport de transmission moyen a donc plusieurs solutions, puisque, dans la plupart des cas, il est possible de résoudre l'équation de conjugaison en couple pour des angles d'entrée distants de plus d'un pas.

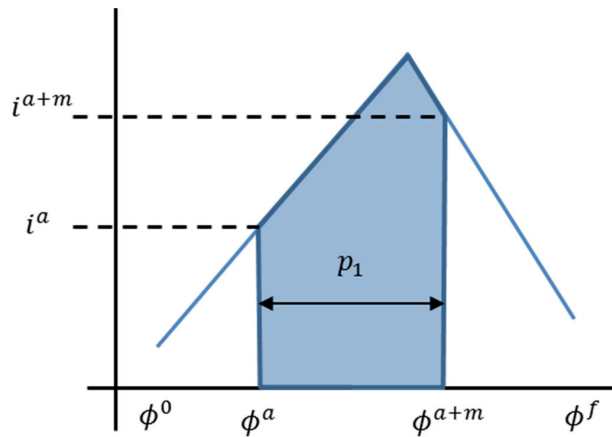


Figure 5.9: Illustration du calcul de \bar{i}^a

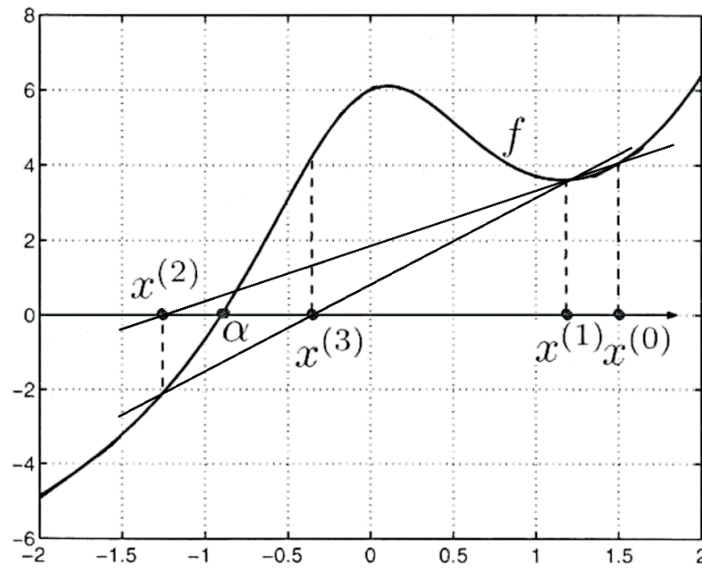


Figure 5.11: Illustration du schéma quasi-Newton (α est la solution recherchée, les différents x correspondent aux résultats des itérations, et les droites sont les approximations linéaires de la courbe f calculées à partir des précédents x)

Ce qui dans notre cas donne :

1. Calcul d'une droite d'approximation $\bar{i}^a = c^a \cdot j^a + d^a$ au moyen des deux derniers points de calcul
2. Résolution de l'équation $c^a \cdot j^{a+1} + d^a = \bar{i}$ pour j^{a+1}
3. Calcul du rapport de transmission moyen pour j^{a+1}
4. Calcul de l'erreur ϵ (Équation 5.4)
5. Recommencer si l'erreur est supérieure à la tolérance fixée

En suivant ce schéma on peut obtenir une approximation de la valeur du rapport de couple j respectant le rapport de transmission moyen \bar{i} selon le critère souhaité (rendement maximum ou minimum).

5.5.4.5.4 Calcul du rapport de couple à évaluer

La première valeur de j à être évaluée après initialisation fournira les valeurs du rapport de transmission moyen envisageables maximum et minimum, calculées selon la méthode présentée au §5.4.6. La valeur de rapport de couple à évaluer est déterminée selon le schéma quasi-newton.

5.5.4.5.5 Calcul de l'erreur

On calcule l'erreur normalisée ϵ . L'erreur se mesure sur le rapport de transmission moyen (\bar{i}) et on la normalise par le rapport de transmission moyen imposé par le rapport des nombres de dents, soit

$$\epsilon = \frac{\bar{i}^a - \bar{i}}{\bar{i}}$$

Équation 5.4

5.5.4.5.6 Tri des valeurs de j ne conduisant pas à une solution

Afin d'augmenter la rapidité de résolution, tous les couples de valeurs (j, \bar{i}) calculés sont stockés et classés. Comme indiqué plus haut, le tri des valeurs j est effectué pour améliorer, lorsque c'est possible, la qualité de la droite remplaçant la dérivée. On ne se contente alors pas seulement d'utiliser le dernier couple calculé pour approximer la dérivée, mais le point le plus proche du dernier résultat, afin d'obtenir la meilleure approximation possible de la pente à l'endroit du dernier point de calcul.

5.5.4.6 Reconstruction

Une fois qu'une valeur de j a été choisie, il faut reconstruire le profil \mathbf{r}_2 . Pour cela on utilise l'Équation 4.12 rappelée ici :

$$\mathbf{r}_2(u, v, \phi_1, \phi_2) = \mathbf{M}_{21}(\phi_1, \phi_2) \mathbf{r}_1(u, v)$$

Le problème bidimensionnel traité ici respectant la conjugaison en couple peut s'écrire comme :

$$\mathbf{r}_2(u, \phi_2(\phi_1), \phi_1) = \mathbf{M}_{21}(\phi_2(\phi_1), \phi_1) \mathbf{r}_1(u)$$

Équation 5.5

Bien que l'établissement de la matrice de passage \mathbf{M}_{21} ne pose pas de problème, il convient de s'attarder sur le traitement de l'angle ϕ_2 . Cet angle se calcule à partir du rapport de transmission instantané $i(\phi_1)$ obtenu par la résolution des équations de conjugaison. L'intégration du rapport de transmission instantané livre alors la loi d'espace $\phi_2(\phi_1)$:

$$\phi_2 = \int_{\phi_1^0}^{\phi_1} i(\phi_1) d\phi_1$$

Équation 5.6

Comme on travaille avec des grandeurs numériques, l'Équation 5.6 se transforme en une somme :

$$\phi_2^n = \sum_{i=1}^{i=n} i^i \cdot \Delta\phi$$

Équation 5.7

Une fois obtenu ϕ_2^n , on peut calculer le point n appartenant à \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{r}_2^n = \mathbf{M}_{21}(\phi_2^n, \phi_1^n) \mathbf{r}_1(u^n)$$

Équation 5.8

La succession de ces points fournit une représentation discrète du profil mené \mathbf{r}_2 .

5.6 Validation du code

Maintenant que la méthode de calcul a été expliquée en détails on en présente la validation, avant d'étudier d'autres cas dans le Chapitre 6. La validation se fait par comparaison des résultats obtenus en appliquant la méthode à des solutions analytiques connues et publiées. On traite ici trois cas au moyen du code présenté dans les chapitres précédents :

1. Une simulation d'un engrènement à rapport de couple constant avec frottement d'une dent à profil de développante : on s'assure que le profil calculé par le nouveau code fonctionne comme imposé dans la formulation du problème.
2. Une simulation d'un engrènement à couple constant avec frottement d'une dent ayant le profil « couple constant » ETA (voir §1.7.2.4) dont on connaît la forme analytique du profil de la dent menée ; on compare alors le profil théorique et le profil calculé et on s'assure que le rapport de couple calculé est bien constant.

5.6.1 Cas du profil d'entrée en développante avec frottement

Pour commencer on présente les résultats obtenus lorsqu'on utilise comme profil d'entrée menant une développante à angle de pression de 20° , avec 80 dents pour la menante et 40 pour la menée. On choisit un coefficient de frottement $\mu = 0.2$.

Après calcul des limites restreintes on obtient un intervalle de solutions pour le rapport de couple de : $0.486 < j < 0.494$, ce qui correspond à des rendements moyens de : $0.972 < \bar{\eta} < 0.988$. On choisit pour notre exemple de prendre la valeur maximum ($j=0.494$) pour reconstruire le profil r_2 . On compare le profil à développante traditionnel et son équivalent conjugué en couple à la Figure 5.12. On peut voir que les différences ne sont pas flagrantes.

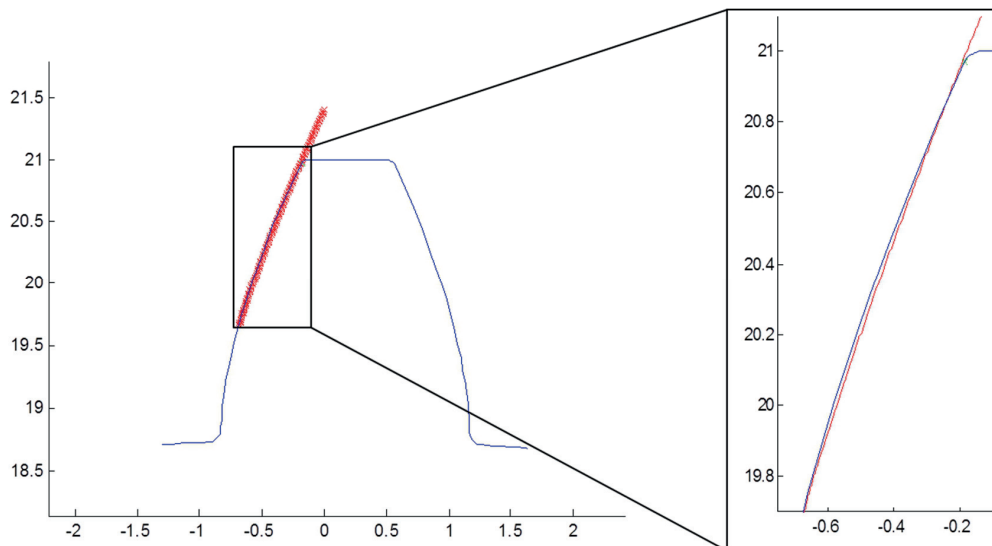


Figure 5.12: Comparaison entre le profil à développante et son équivalent conjugué en couple

Le profil décrit par points est ensuite reconstruit en utilisant une approximation par splines (décrite dans l'Annexe E) qui recrée un profil selon les standards décrits au §2.2 et l'analyse grâce à l'outil décrit au Chapitre 3.

Le résultat de simulation du profil à développante contre son conjugué sont présentés à la Figure 5.13. On observe que le rapport de couple (normé sur la figure) prend la valeur de $j = 0.4935$, ce qui correspond à une erreur de 0.1%. On constate donc que le profil est reconstruit en respectant la valeur imposée du rapport de couple.

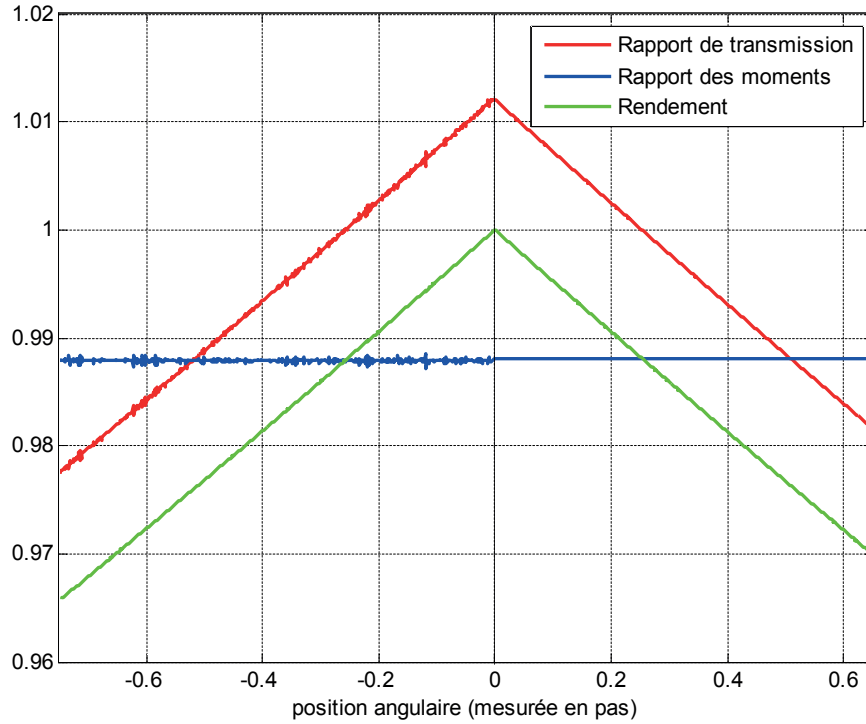


Figure 5.13: Résultat de simulation d'un profil à développante engrené contre son conjugué en couple pour un $j = 0,494$. Les rapports de transmission et de couple sont normés.

5.6.2 Cas du profil à couple constant ETA

On démontre ici que le code permet de retrouver le profil à couple constant ETA.

On choisit comme profil d'entrée r_1 le profil ETA avec un angle de pression de 20° , un rendement moyen de $\bar{\eta} = 0.988$, et un nombre de dents de 80 pour la menante contre 40 pour la menée.

Pour les limites restreintes, on obtient : $0.487 < j < 0.494$, ce qui correspond à des rendements moyens de $0.974 < \bar{\eta} < 0.989$. On voit donc que la valeur prévue 0.988 fait bien partie de l'intervalle calculé.

Pour pouvoir reconstruire le profil r_2 qui fonctionne selon les caractéristiques du profil ETA et qui permette la comparaison, on doit choisir un rapport de couple qui soit compatible avec le rendement moyen donné en entrée. On doit donc choisir $j = 0.494$. Le profil alors calculé selon ces conditions est représenté à la Figure 5.14.

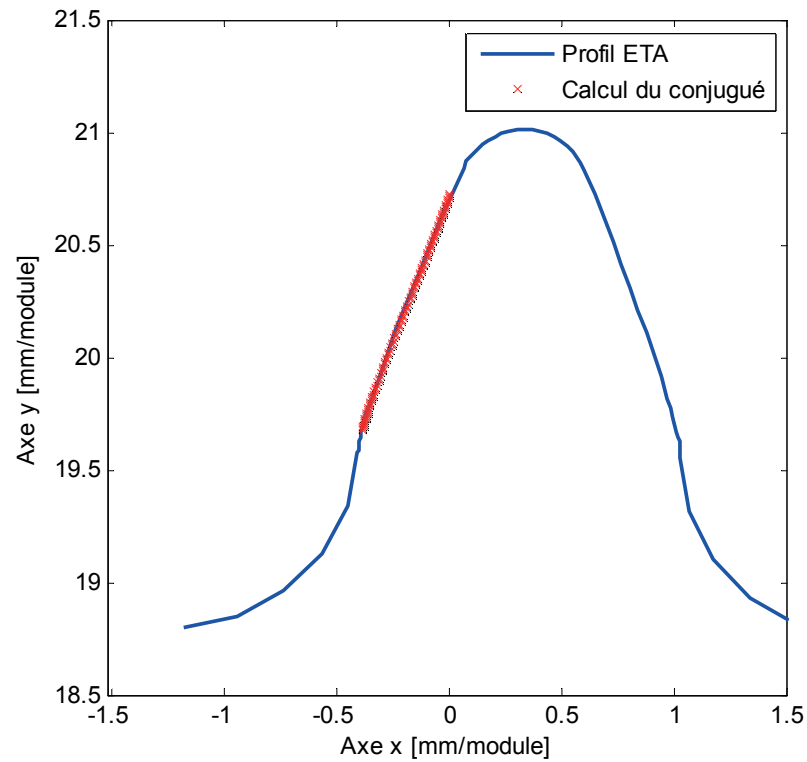


Figure 5.14: Comparaison entre le profil ETA et le résultat de conjugaison en couple

Il est difficile de se rendre compte de la qualité du calcul sur cette figure. On a donc calculé l'erreur entre le profil théorique et le profil calculé. On représente cette erreur à la Figure 5.15.

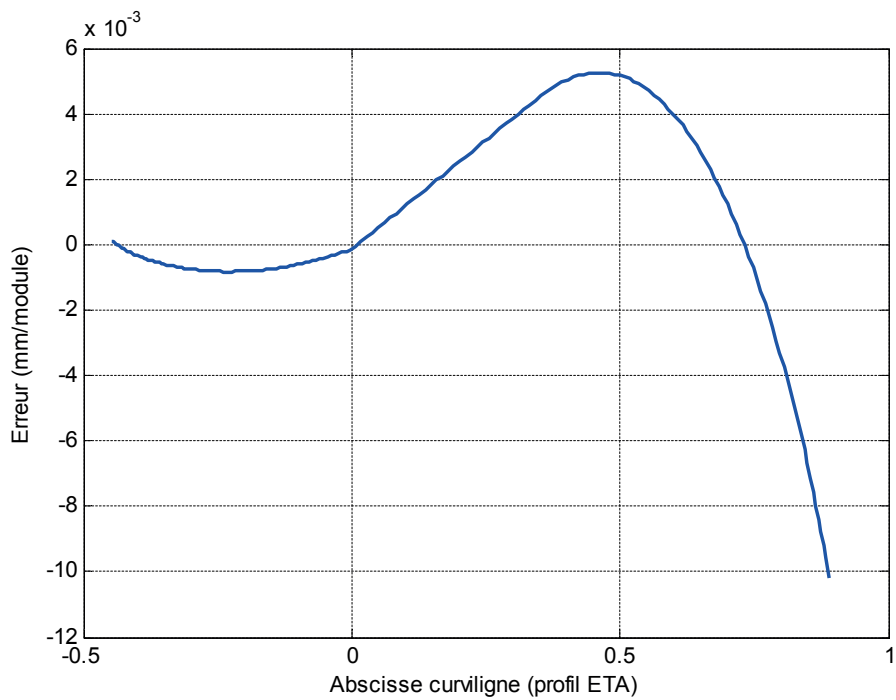


Figure 5.15: Mesure de l'erreur entre le profil ETA et sa reconstruction numérique

On voit que l'erreur sur le profil est inférieure à 1% (les grandeurs présentées sont en millimètres, mais pour un module $m = 1$ [mm]), ce qui démontre le bon comportement du programme de calcul du conjugué. Les sources des erreurs représentées à la Figure 5.4 sont multiples. Une première source d'erreur est la résolution des équations de conjugaison. Une seconde est l'intégration numérique du rapport de transmission pour l'obtention de la loi d'espace $\phi_2(\phi_1)$, et une troisième source d'erreur provient de la méthode de calcul utilisée pour mesurer l'erreur entre les deux profils.

Les abscisses curvilignes ne sont pas représentées sur l'ensemble du domaine $[-1;1]$, car le profil reconstruit selon la méthode de conjugaison n'est pas aussi long que le profil théorique, mais suffit tout de même à réaliser l'engrènement prévu. C'est un des désavantages d'utiliser des roues d'entrée réelles, car la longueur du profil est définie par avance, contrairement à une résolution analytique dont les dimensions peuvent être calculées par après. La longueur du profil est également limitée par la résolution des équations elles-mêmes. On ne trouve pas forcément de solution au problème de la conjugaison en couple pour toutes les positions possibles du profil d'entrée, ce qui limite la taille du profil calculé, bien que son fonctionnement soit garanti par la méthode proposée dans les paragraphes précédents.

5.7 Conclusion

La méthode employée dans le code de résolution ainsi que le code développé pour la représentation des profils ont permis de calculer des profils dits « conjugués en couple », c'est-à-dire des profils respectant une condition sur le couple pour des engrenages plans.

On a vu que la détermination d'un profil *conjugué en couple* passait par le calcul de limites que l'on a nommé « restreintes ». Ces limites décrivent un intervalle dans lequel n'importe quelle valeur de rapport de couple peut être choisie, car celle-ci permettra d'obtenir un profil mené conjugué en couple qui respectera l'impératif de fonctionnement donné par la condition de pas.

On a mis en lumière les limites dites « globales » faciles à calculer qui permettent de borner le calcul numérique lors de la recherche des limites restreintes.

La méthode utilisée permet de déterminer rapidement les limites restreintes. On peut alors choisir une valeur de rapport de couple, et calculer le profil mené qui respectera cette valeur.

Nous avons aussi dérivé les équations de conjugaison en couple pour des configurations d'engrenage tridimensionnelles. La méthode de résolution développée pour le cas plan s'applique aussi à la résolution des équations tridimensionnelles. En particulier le concept de limites globales et restreintes définissant l'espace de solutions reste valable. Nous n'avons cependant pas généralisé nos résultats bidimensionnels dans le cadre de cette thèse.

Chapitre 6 Applications

6.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente quelques applications du programme développé et discuté dans les chapitres précédents.

On commence par présenter quelques cas d'analyse d'engrènement avec différents profils et différentes dispositions des axes. On discutera ensuite de quelques cas de génération de profils.

6.2 Analyses de profils

6.2.1 Profils et dispositions analysées

On souhaite analyser un engrènement correspondant plus à la réalité du monde horloger que l'exemple ($z_1 = 80$; $z_2 = 40$) utilisé au Chapitre 3 et au Chapitre 5. On traite donc de l'engrènement d'un barillet contre le premier pignon de la chaîne barillet-échappement. Le nombrage utilisé pour le cas étudié est de $z_1 = 98$ contre $z_2 = 14$. On utilise un coefficient de frottement $\mu = 0.2$ pour l'analyse du rapport de couple et du rendement. Le module n'a pas d'importance dans l'étude des rapports de transmission cinématique et de couple, mais il a été défini comme $m = 1$ [mm]. L'épaisseur de la roue est de 1[mm], alors que celle du pignon est de 3[mm]. Ces valeurs ne correspondent pas à la réalité horlogère, mais elles permettent néanmoins de simuler l'effet des erreurs d'alignement des engrenages de mouvement de montre.

Les configurations d'engrènement analysées sont les suivantes :

- Nominale (aucune erreur)
- Avec erreurs d'entraxe
- Avec erreurs de parallélisme des axes
- Avec erreurs de forme (profil)

Ces erreurs ne sont pas déterminées au hasard. Un mouvement horloger ne permet pas d'aligner exactement les paliers guidant les axes et il en découle un certain nombre d'erreurs. L'assemblage des ponts sur la platine, la précision d'usinage des trous accueillant les pierres, la précision des pierres (en particulier leur concentricité), conduisent à une somme d'erreurs qui influence la position des axes de rotation des roues, en particulier l'entraxe (cf. Figure 6.1).

On illustre le fonctionnement du programme avec un profil horloger le NIHS2025 (§ 1.7.2.1 et [27]).

Une partie des résultats présentés ci-après ont été obtenus par Mlle L. Perroud qui a réalisé durant un stage chez notre partenaire une étude approfondie de différents profils, horlogers ou non, à l'aide de notre programme d'analyse.

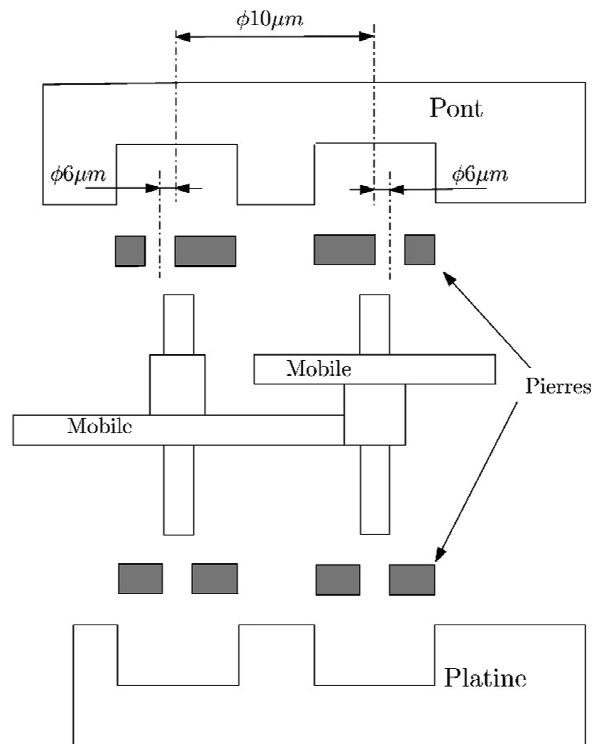


Figure 6.1: Illustration de la chaîne de tolérances (un mobile est un assemblage axe-pignon-roue)

6.2.2 Résultats

Pour analyser l'effet des erreurs, on se concentre sur les éléments suivants :

- rapport de transmission instantané
- rapport de couple instantané
- rendement
- zone d'engrènement et rapport de conduite

Ces éléments sont comparés avec le comportement dit « nominal », c'est-à-dire sans erreurs, de l'engrènement choisi. On parlera de variations pour le rapport de transmission instantané et pour le rapport de couple instantané. On définit ces variations comme étant l'écart entre le minimum et le maximum observé dans la zone d'engrènement divisé par la valeur nominale ($var_{couple} = \frac{j_{max} - j_{min}}{j_{moy}}$). Quant au rendement on se contente d'en préciser la valeur moyenne sur la zone d'engrènement.

6.2.2.1 Configuration nominale (sans erreurs)

La Figure 6.2 illustre le comportement du profil NIHS2025 pour un engrènement sans erreurs. Elle montre l'évolution des paramètres considérés en fonction de la position angulaire normalisée par le pas angulaire, la valeur zéro représentant le passage par la ligne des centres.

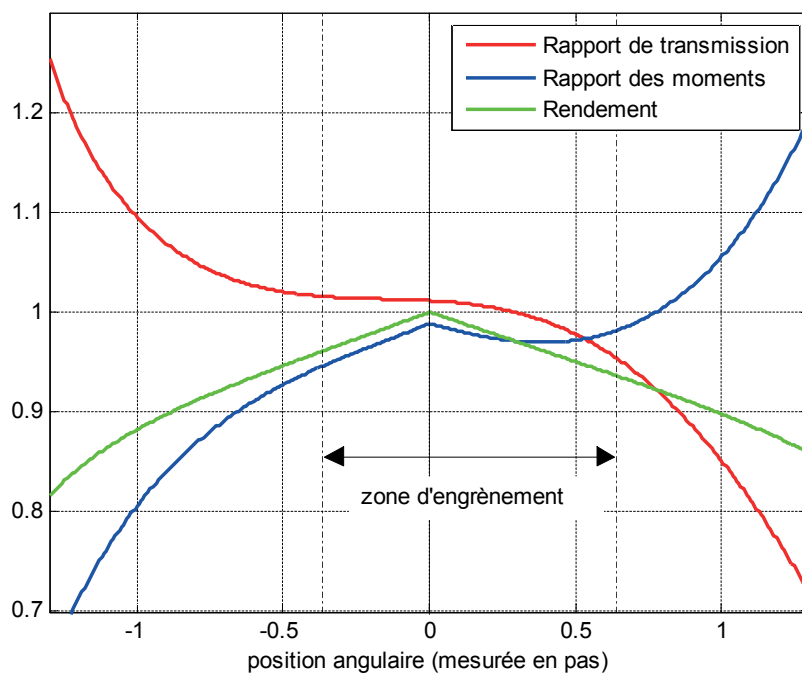


Figure 6.2: Comportement du profil NIHS2025 sans aucune erreur

L'évolution des divers paramètres dans la zone d'engrènement démontre que le profil NIHS 2025 ne livre ni un rapport de couple constant, ni un rapport de transmission constant. Ce type de profil à rapport de transmission variant sur l'ensemble de l'engrènement ne peut pas avoir un rapport de conduite supérieur à 1. En effet, si deux paires de dents ayant ce profil étaient en prise simultanément, leurs positions angulaires différentes dans la zone d'engrènement conduirait à deux rapports de transmission instantanés différents ce qui n'est physiquement pas possible et cause une interférence.

6.2.2.2 Configuration avec erreurs d'entraxe

Les erreurs d'entraxe auxquelles nous nous intéressons sont les suivantes (voir Figure 6.3) :

- $-0.4 \cdot m$
- $-0.2 \cdot m$
- $+0.2 \cdot m$
- $+0.4 \cdot m$

L'effet de ces erreurs sur le comportement de l'engrènement est présenté de la Figure 6.4 à la Figure 6.6.

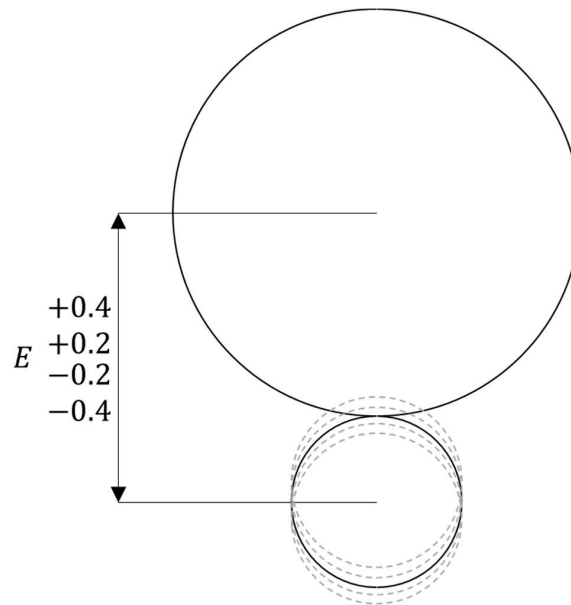


Figure 6.3: Définition des erreurs d'entraxe

La Figure 6.4 montre comment l'erreur d'entraxe influence le rapport de transmission et la position de la zone d'engrènement. La variation du rapport de transmission augmente avec l'erreur, tandis que la zone d'engrènement se déplace sur la gauche de la ligne des centres.

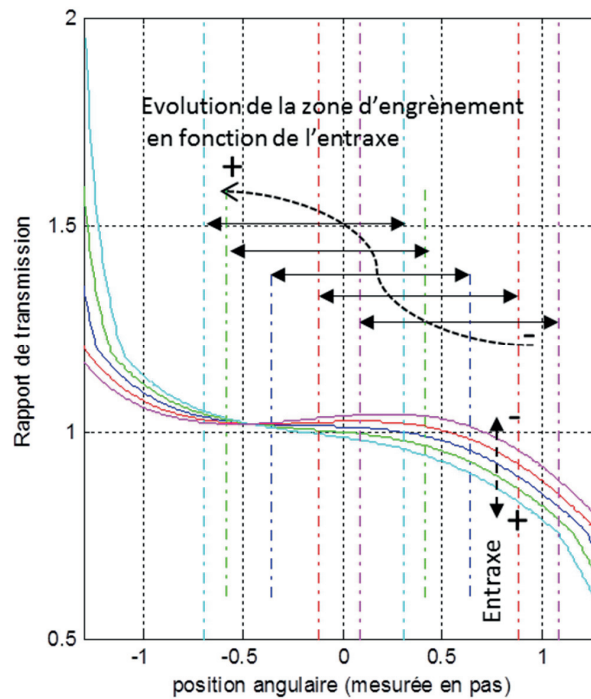


Figure 6.4: Evolution du rapport de transmission et position de la zone d'engrènement du profil NIHS 2025 pour différents entraxes

La Figure 6.5 présente l'évolution du rapport de couple. On remarque une singularité au moment du passage du zéro de l'abscisse, qui correspond au point du passage de la ligne des centres, qui marque égale-

ment l'inversion du sens de la force de frottement. Cette inversion est ainsi à l'origine de la discontinuité de pente de la courbe du rapport de couple au passage de la ligne des centres. Les effets provoqués par les erreurs d'entraxe sont inversés par rapport à ceux calculés pour le rapport de transmission.

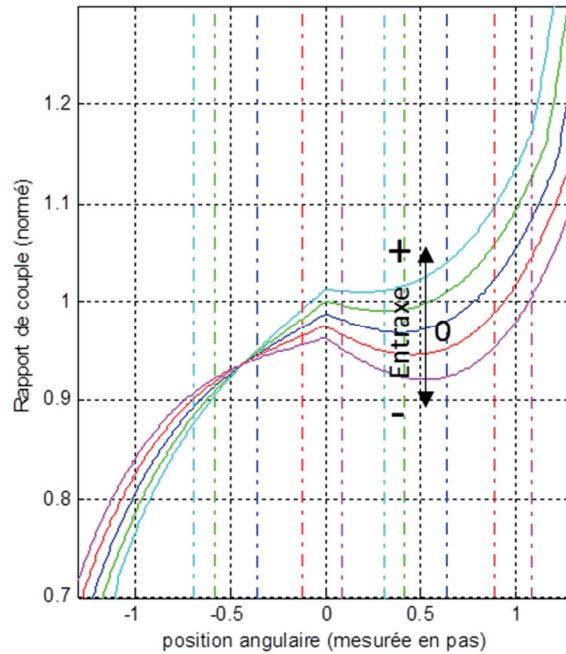


Figure 6.5: Evolution du rapport de couple pour différents entraxes

L'évolution du rendement est présentée à la Figure 6.6. Les erreurs d'entraxe n'ont que très peu d'influence sur le rendement et l'on remarque aussi que toutes les courbes passent par le point $[0 ; 1]$. Ce résultat est prévisible puisque la vitesse de glissement, et par conséquent la dissipation, sont nulles à cet endroit.

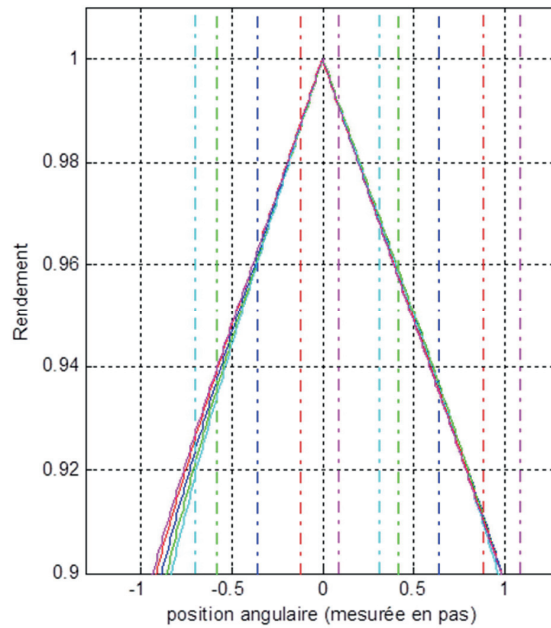


Figure 6.6: Evolution du rendement pour différents entraxes

La Figure 6.4 et la Figure 6.5 montrent que l'entraxe a un impact non-négligeable sur le rapport de transmission, et le rapport de couple respectivement. Une erreur d'entraxe de $+0.4x_m$ entraîne des variations de respectivement 14.5% et 9%, contre 3.5% et 4.5% pour le cas nominal. Les modifications du rapport de transmission déplacent la zone d'engrènement vers des valeurs plus faibles de position angulaire, comme illustré à la Figure 6.4. Comme les modifications d'entraxe influencent aussi le rapport de couple, mais de façon opposée, le rendement instantané varie moins fortement (Figure 6.6). Par contre le rendement moyen (Figure 6.7 b)) subit des changements notables, principalement dus au déplacement de la zone d'engrènement.

Le comportement de la paire de roues évaluée fluctue donc passablement avec l'entraxe, comme le résume la Figure 6.7 , qui présente les variations des rapports cinématiques et des rapports de couple en fonction de l'entraxe (Figure 6.7 a)), ainsi que le rendement moyen en fonction de l'entraxe (Figure 6.7 b)).

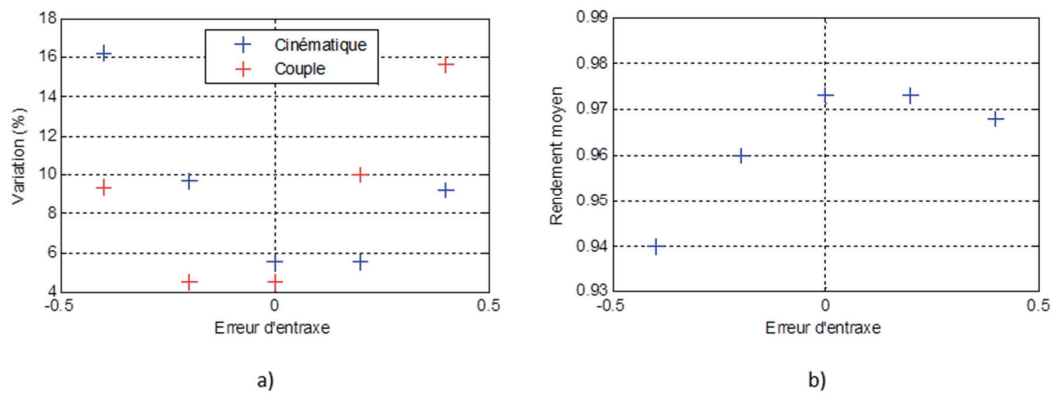


Figure 6.7 : Résumé du comportement du profil NIHS2025 en présence d'erreurs d'entraxe, a) variation des rapports de transmission et de couple ; b) rendement

6.2.2.3 Configuration avec erreurs d'alignement

Les erreurs d'alignement étudiées, représentées à la Figure 6.8, sont les suivantes :

1. Erreur d'alignement de 1° autour de l'axe x
2. Erreur d'alignement de 1° autour de l'axe y
3. Cumul des deux erreurs

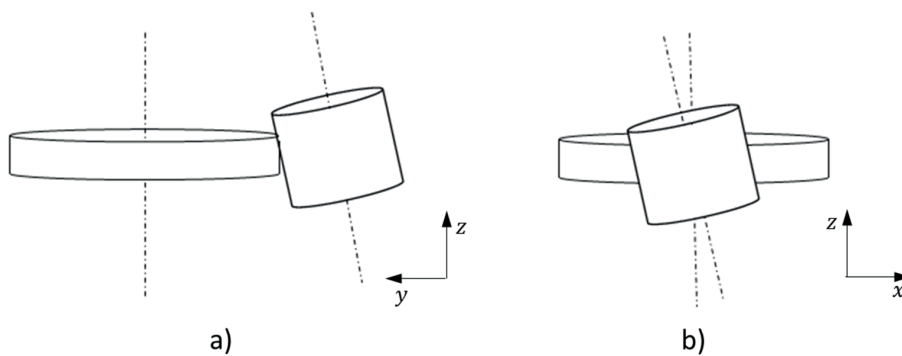


Figure 6.8: Illustration des erreurs d'alignement : a) autour de l'axe x ; b) autour de l'axe y

Les Figure 6.9 à Figure 6.11 représentent les résultats des simulations pour les erreurs d'alignement des axes.

La Figure 6.9, qui présente l'évolution du rapport de transmission durant l'engrènement, montre que les erreurs de parallélisme des axes considérées n'ont pratiquement pas d'influence.

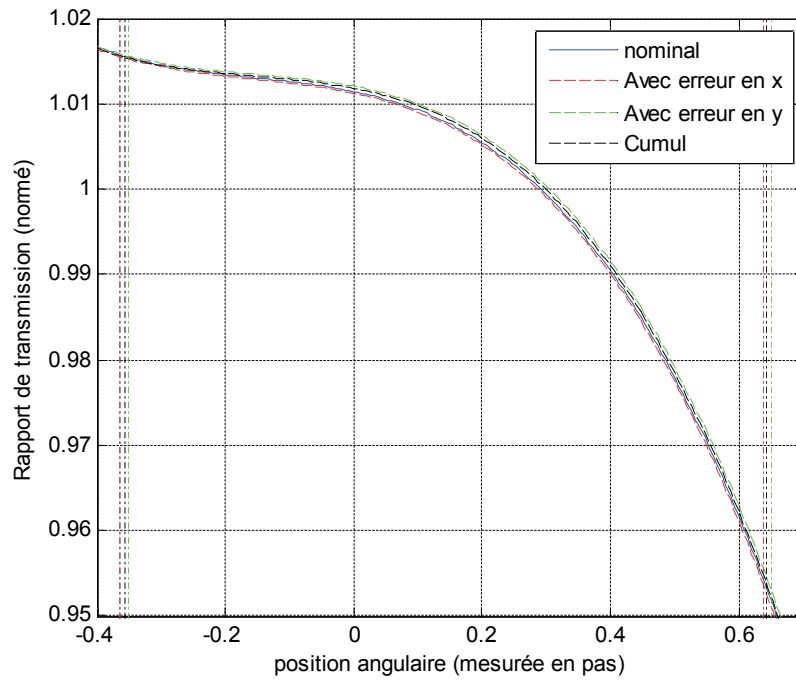


Figure 6.9: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rapport de transmission

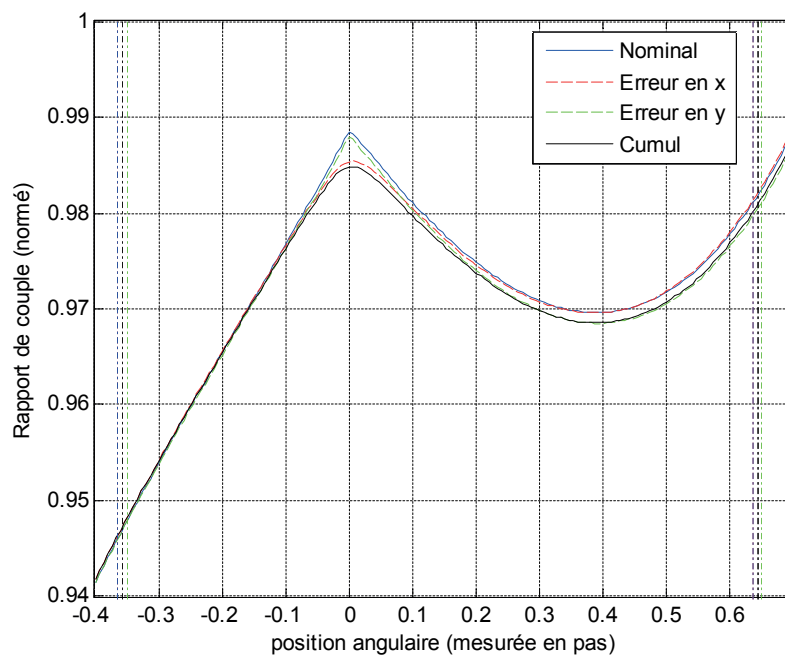


Figure 6.10: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rapport de couple

On peut tirer une conclusion similaire pour le rapport de couple de la Figure 6.10. On note que le comportement au passage de la ligne des centres induit par l'erreur d'alignement selon l'axe x supprime la singularité observée lorsque les axes sont parallèles.

La Figure 6.11 représente l'évolution du rendement. On constate également peu de modifications dues aux erreurs d'alignement. La singularité au sommet de la courbe est également éliminée avec l'introduction d'erreur autour de l'axe x , conséquence directe du phénomène observé sur le rapport de couple à la figure précédente.

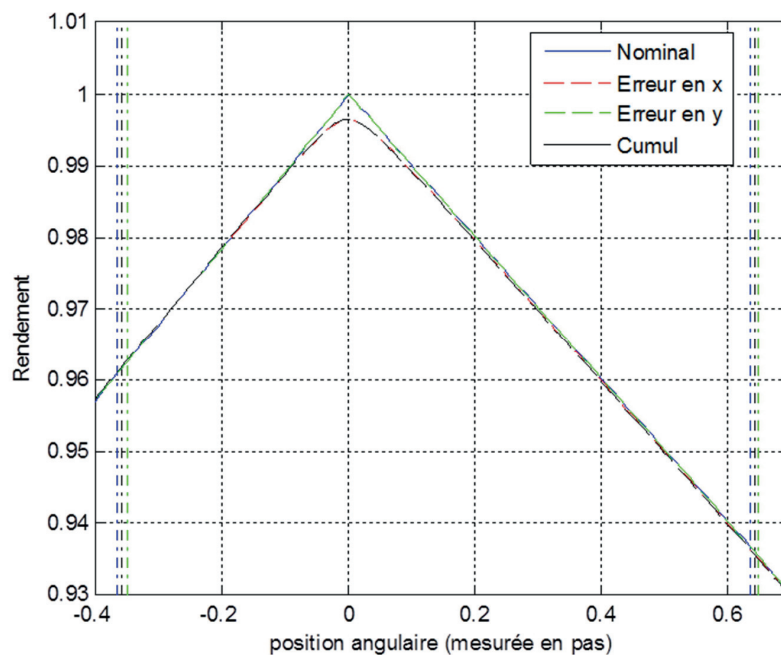


Figure 6.11: Influence des erreurs angulaires des axes des roues sur le rendement

On voit donc que les erreurs d'alignement de l'ampleur considérée ont assez peu d'influence sur le comportement de l'engrenage par rapport au comportement nominal (variation $<1\%$ pour tous les cas, quel que soit le paramètre évalué).

Le résultat obtenu pour le rapport de transmission (Figure 6.9) est logique et prévisible. Puisque l'épaisseur du pignon est plus importante que celle de la roue, l'engrènement se passe comme si une projection du profil initial avait été faite, et la différence entre le profil et sa projection, dans notre cas, est minime, ce qui ne peut provoquer que des écarts de faible importance par rapport au comportement nominal du profil.

Les différences observées sur le rapport de couple, également peu affecté, sont le résultat d'une augmentation de la vitesse de glissement, qui n'est plus contenue dans le plan d'engrènement initial et qui provoque un changement de la direction du frottement et ainsi de la valeur du couple instantané. Le changement de direction de la force de frottement est par contre minime, car l'erreur d'alignement est faible.

La disparition de la singularité s'explique également par la vitesse de glissement. Alors que dans le cas nominal plan, avec erreurs d'entraxe ou non, la vitesse de glissement s'annule au moment du passage de la ligne des centres, car le contact se fait sur cette ligne, ce n'est pas le cas lorsqu'on introduit des erreurs d'alignement. La ligne de contact ne passe plus par la ligne des centres, et la vitesse de glissement ne s'annule plus. Bien que cette affirmation soit valable pour les deux cas d'erreur d'alignement, on la visualise plus facilement dans le cas d'erreur d'alignement autour de l'axe x .

6.2.2.4 Configuration avec une erreur de forme

Les erreurs de formes évaluées sont les suivantes :

1. Une surépaisseur globale de $0.1 \times$ le module (notée erreur $+0.1$)
2. Une erreur de forme « linéaire » variable, entre $-0.1 \times$ et $0.1 \times$ le module (notée $0.1 \times u$)

Ces erreurs, illustrées à la Figure 6.12, ne sont appliquées qu'au profil menant, le profil mené (le pignon) conservant la géométrie nominale.

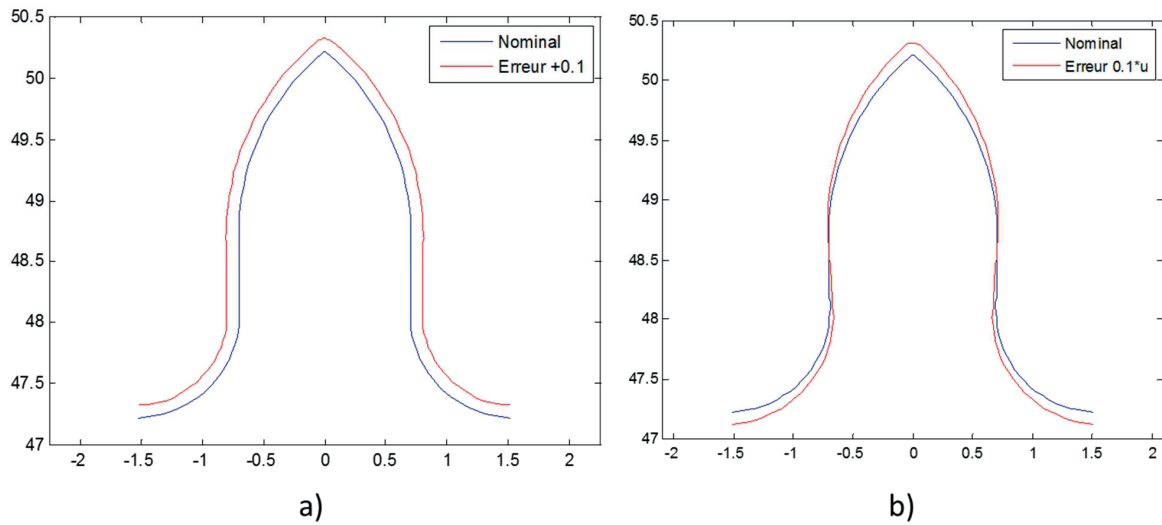


Figure 6.12: Illustration des erreurs de forme; a) type "surépaisseur"; b) type "linéaire"

La Figure 6.13 présente le comportement du rapport de transmission lorsque le profil de la roue est soumis à des erreurs de profil. On constate que l'erreur de type « linéaire » provoque des variations plus importantes que l'erreur de type « surépaisseur ». On constate également un déplacement de la zone d'engrènement, la poussée s'effectuant pour une grande majorité après la ligne des centres ($>80\%$).

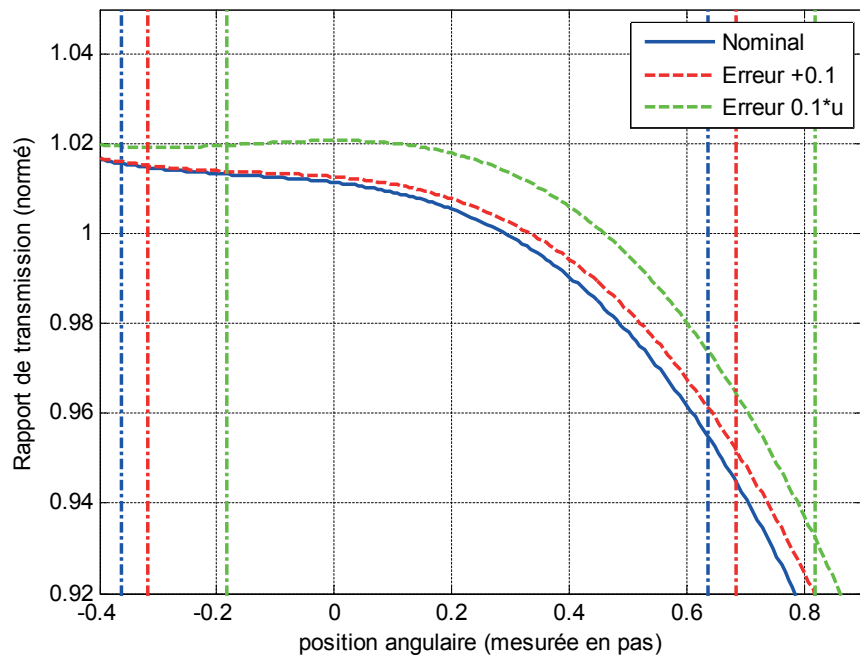


Figure 6.13: Illustration de l'effet des erreurs de forme sur le rapport de transmission

On peut faire le même constat à propos du rapport de couple présenté à la Figure 6.14, qui subit des modifications significatives, surtout pour le profil soumis à une erreur de type « linéaire ».

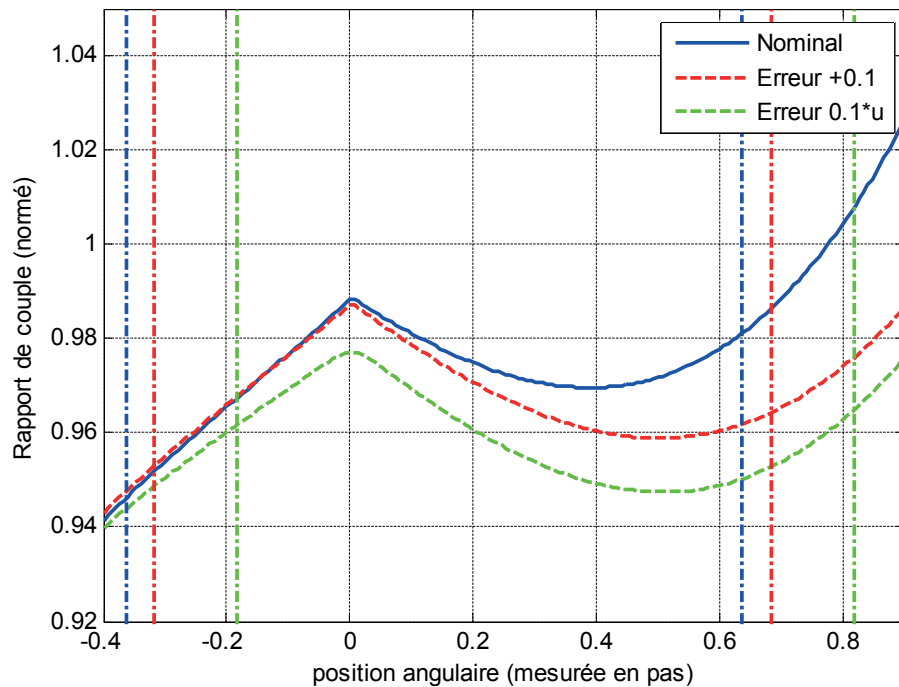


Figure 6.14: Illustration de l'effet des erreurs de forme sur le rapport de couple

Le rendement instantané, illustré à la Figure 6.15, subit également quelques modifications par rapport au cas nominal. Les erreurs par contre ne se distinguent pas fortement les unes des autres.

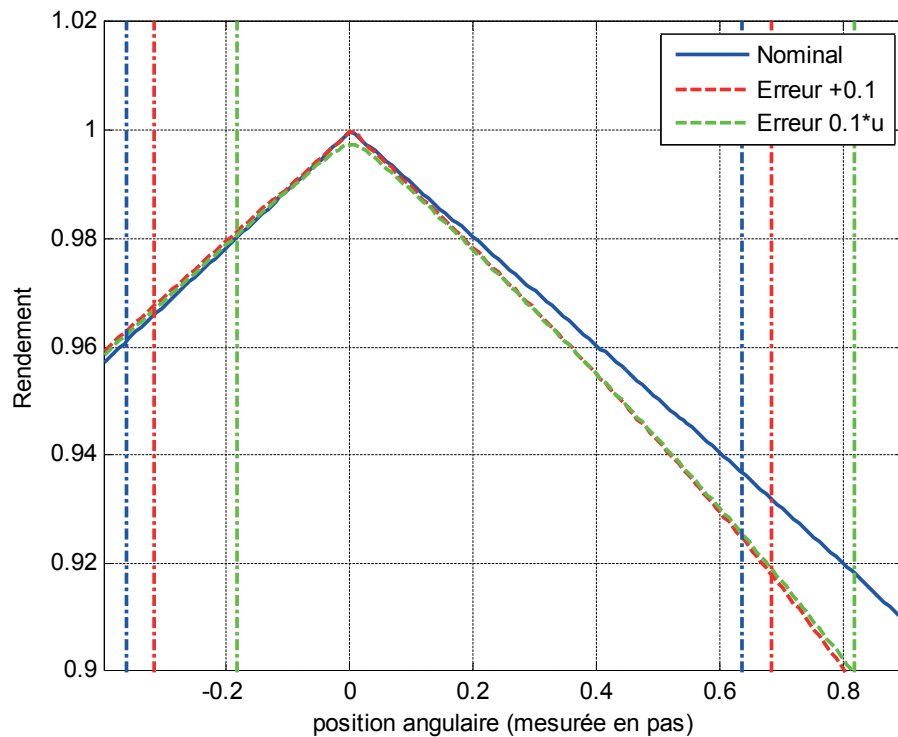


Figure 6.15: Comparaison des rendements

Le Tableau 6.1 résume les résultats obtenus dans ces simulations :

Erreurs	Nominal	+0.1	+0.1*u
Rapport de transmission	6.2%	6.2%	8.9%
Rapport de couple	4.4%	3.6%	3.1%
Rendement	0.973	0.968	0.959

Tableau 6.1 : Comparaisons des variations de performances dues à des erreurs de forme

On remarque aussi que l'erreur de type « surépaisseur » n'a que peu d'influence sur les performances globales. Par contre l'erreur « linéaire » influence de façon plus marquée le rapport de transmission, bien qu'elle n'influence que peu le rapport de couple. On constate que les erreurs de forme, même si sur les figures on a pu mettre en évidence localement des différences significatives par rapport au comportement nominal, n'influence pas de manière drastique le comportement global. Ce constat peut paraître surprenant, mais s'explique par le déplacement de la zone d'engrènement.

Globalement les erreurs de profil provoquent des déviations supérieures à celles simulées lors d'erreurs d'alignement, mais inférieures à celles induites par des erreurs d'entraxe.

6.2.3 Discussion des résultats

Après avoir effectué ces simulations, on analyse les résultats et les enseignements que l'on peut en tirer.

6.2.3.1 Influence des erreurs

Pour le cas analysé du profil NIHS 2025, on a vu que les différences de performance provoquées par les différentes erreurs n'étaient pas d'ordre de grandeur identique. Si les erreurs d'entraxe induisent des baisses de performance significatives, ce n'est pas le cas des erreurs d'alignement, même combinées. Les erreurs de forme par contre influencent les performances, mais de manière moins marquée que les erreurs d'entraxe. Le Tableau 6.2 résume les différentes influences en ne retenant que les valeurs extrêmes des variations.

Erreurs (comparaison par rapport au nominal)	Nominal	Entraxe	Alignement	Forme
Rapport de transmission	6.2%	16.1% (+150%)	6.2% (+0%)	8.9% (+40%)
Rapport de couple	4.4%	15.5% (+250%)	4.3% (-3%)	3.6% (-18%)
Rendement	0.973	0.94 (-4%)	0.972(-0.1%)	0.96 (-1%)

Tableau 6.2: Comparaison des différentes erreurs. Les chiffres présentés entre parenthèses indiquent les augmentations par rapport au comportement nominal.

On voit que les erreurs d'entraxe provoquent bien plus de différences que les autres erreurs géométriques. On peut même dire que les erreurs d'alignement n'ont pas d'influence significative (tant qu'elles restent de l'ordre de grandeur des erreurs étudiées). Les erreurs de forme quant à elles influencent le résultat mais dans une moindre mesure. Elles ont même un effet bénéfique sur les fluctuations du rapport de couple.

6.2.3.2 Conclusions

D'une manière générale, on peut voir que les erreurs d'entraxe, provoquent des imprécisions de deux ordres de grandeur supérieures aux erreurs d'alignement. Bien qu'il soit difficile d'étendre directement ces résultats à d'autres profils, on peut tout de même dégager une première information : les erreurs d'alignement ne provoquent pas de changements significatifs de performance. Ce résultat est extensible tant que les erreurs d'alignement restent de l'ordre de 1° , puisque le profil projeté qui garantit le rapport de transmission n'est que très peu modifié. C'est également le cas des vitesses de glissement qui, on le rappelle, sont responsables des pertes.

Les erreurs de forme quant à elles provoquent des résultats différents suivant leur nature. Une tendance se dégage toutefois, et cette constatation est appuyée par les observations que l'on a faites également à propos de l'élaboration des profils conjugués : c'est que la direction de la normale prime sur la position du point de contact. Les deux grandeurs sont bien évidemment liées et importantes, mais une erreur induisant un changement de direction important de la normale par rapport au profil nominal aura plus d'effet que des erreurs de surépaisseur (tant qu'on ne bloque pas le fonctionnement évidemment).

6.3 Profils conjugués

On s'intéresse maintenant à quelques cas de conjugaison en couple. Il s'agit d'illustrer le programme mis en place et présenté au Chapitre 5.

6.3.1 Profils testés

On souhaite comparer la génération de profils conjugués en couple pour un cas d'engrènement similaire à celui évalué précédemment, à savoir un engrènement à roue menante de 98 dents contre un pignon mené de 14 dents ($\bar{i} = 0.143$). On évalue différents profils d'entrée pour tester leur capacité à effectuer ce genre d'engrènement pour un coefficient de frottement $\mu = 0.2$.

On se propose d'analyser les profils suivants :

- NIHS 2025
- Développante à angle de pression $\alpha = 20^\circ$
- Cosine

6.3.2 NIHS 2025

Ce profil est celui utilisé pour les cas d'analyse des performances présentés plus haut.

Une fois les calculs effectués on obtient les limites restreintes du domaine de solution pour j , ce qui permet de choisir une valeur de rapport de couple. Dans notre cas on obtient $0.131 < j < 0.139$, et on choisit de manière arbitraire la valeur de $j = 0.135$. Le profil conjugué obtenu est représenté à la Figure 6.16.

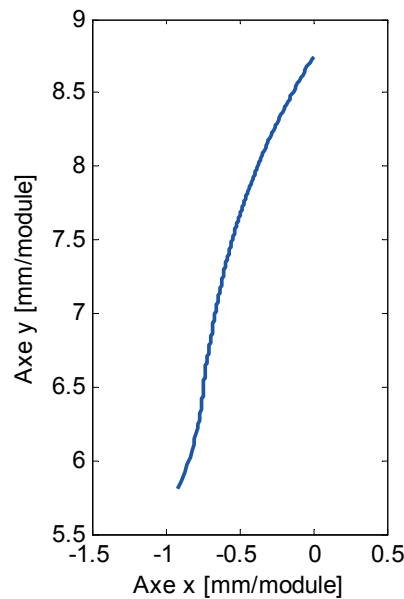


Figure 6.16: Profil conjugué en couple calculé (entrée: NIHS 2025 98-14)

Si on simule le comportement de cette paire de profils on obtient les courbes présentées à la Figure 6.17. On observe que le rapport de couple n'est pas aussi plat qu'espéré. Par contre le long de la zone d'engrènement (de -1 à 0) celui-ci ne varie pas de façon importante, et est contenu entre 0.948 et 0.961, soit une variation de 1%, donc trois fois moins que le cas nominal. On voit par contre que les performances se dégradent après le passage de la ligne des centres, alors qu'elles devraient suivre une ligne horizontale. Ce comportement est tout à fait normal, puisqu'on sort du cas d'engrènement calculé par la conjugaison en couple.

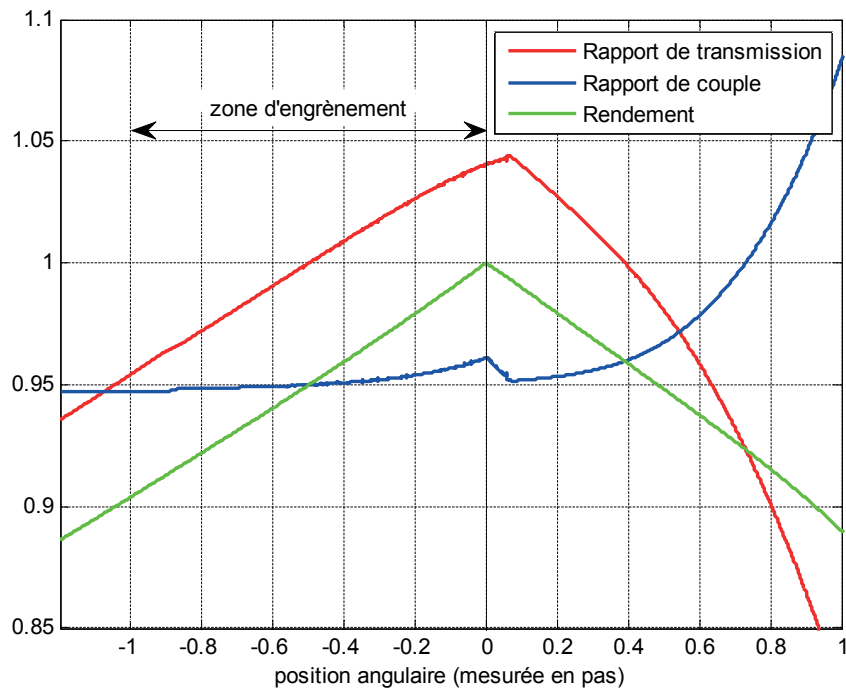


Figure 6.17: Comportement simulé du profil NIHS2025 contre son conjugué en couple

On note toutefois que le résultat dans la zone d'engrènement n'est pas tout à fait conforme aux attentes, puisque le rapport de couple n'est pas aussi constant qu'espéré. Ces différences peuvent en partie s'expliquer par les erreurs de reconstruction. Afin de s'assurer que les différences observées proviennent bien d'erreur de reconstruction et d'écarter tout doute lié à la résolution des équations, on compare les rapports de transmission obtenus par simulation et par calcul du conjugué. A la Figure 6.18 qui représente ces rapports, on observe une différence très nette. Ces différences proviennent probablement des différentes étapes de la reconstruction présentées au §5.5.4.6, ainsi que de la représentation par spline. La principale source d'erreur est vraisemblablement l'intégration effectuée pour la reconstruction. On voit bien que l'erreur augmente avec l'angle de rotation qui est la variable d'intégration. Il est probable que ce résultat provienne de l'accumulation de toutes les petites erreurs, qui se retrouvent sommées par l'intégration. On pourrait probablement améliorer ces différentes étapes pour obtenir de meilleurs résultats. Ceux présentés ici restent malgré tout relativement bons.

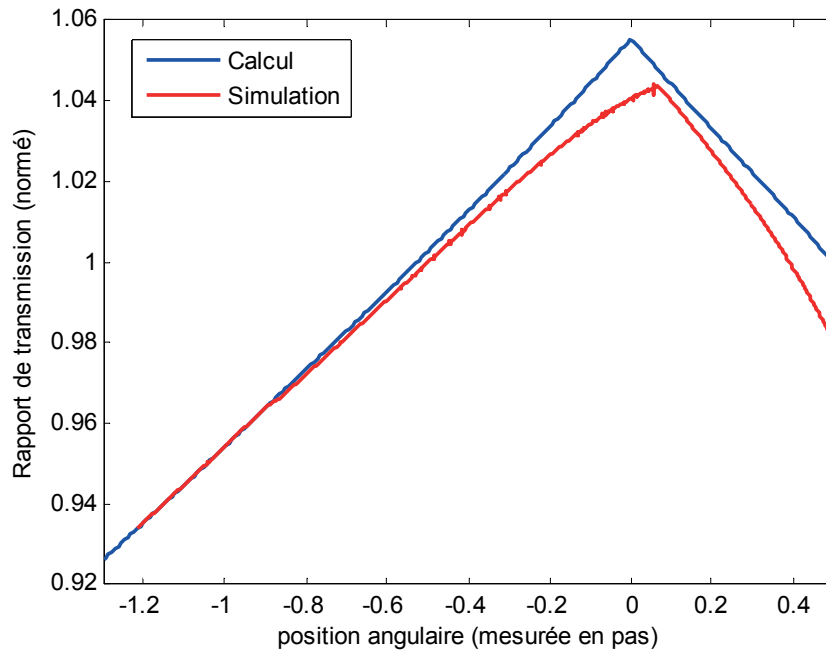


Figure 6.18: Comparaison des rapports de transmission calculé pour la conjugaison et simulé

Cet engrènement a toutefois peu de chance d'être utilisé tel quel, principalement à cause de la zone d'engrènement qui se fait entièrement avant la ligne des centres, ce qui est peu favorable, tant en terme d'usure (glissement important) que de risque de coincement (arc-boutement). Le profil laisse également un jeu très faible en fond de dent à cause de la hauteur très importante du conjugué, ce qui n'est pas du tout favorable à l'emploi de ce profil, du moins en horlogerie, où les imprécisions de positionnement importantes pourraient amener à des problèmes de coincement ou d'interférence. Cette faible marge est à mettre également en lien avec la position de la zone d'engrènement qui se fait entièrement avant la ligne des centres.

6.3.3 Développante

On souhaite étudier la possibilité de réaliser l'engrènement proposé à partir d'un profil à développante avec un angle de pression de 20° .

Après calcul on obtient les limites restreintes suivantes pour le rapport de couple : $0.134 < j < 0.140$. On choisit la valeur de $j = 0.139$ pour construire le profil. On obtient alors le profil présenté à la Figure 6.19.

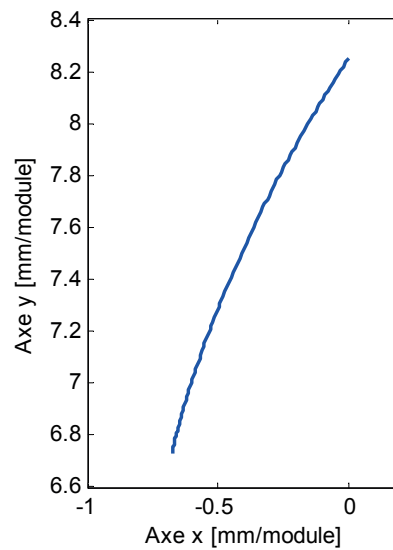


Figure 6.19: Représentation du profil conjugué en couple calculé (profil d'entrée : développante $\alpha = 20^\circ$).

Si on simule le comportement de ce profil on obtient les courbes présentées à la Figure 6.20 pour les rapports de transmission et de couple et pour le rendement.

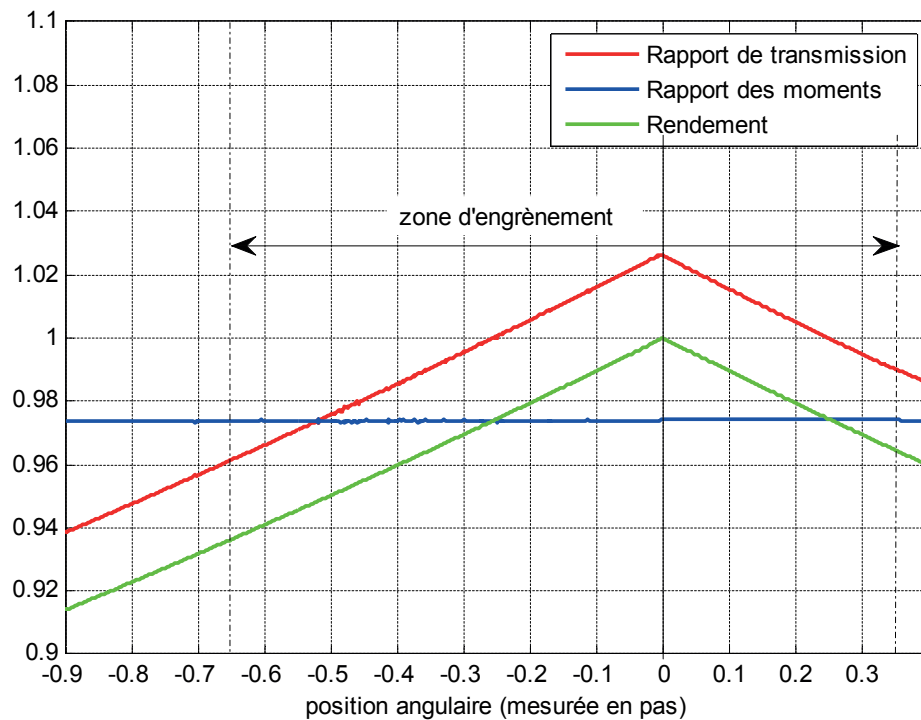


Figure 6.20: Comportement de l'engrènement 98-14 avec profil à développante ($\alpha = 20^\circ$) comme entrée

La zone d'engrènement calculée pour le profil proposé n'est pas du tout centrée autour de la ligne des centres. La majorité (>60%) du contact se fait avant la ligne des centres, ce qui en général n'est pas souhaité. Les profils proposés ne fonctionneraient d'ailleurs pas ensemble, car ils interféreraient en fond de dent, le

profil conjugué calculé étant beaucoup trop haut. C'est malheureusement un des points qui n'est pas détecté avec la forme actuelle du programme.

6.3.4 Cosine

On souhaite également illustrer un profil conjugué en couple pour un profil cosinus (cf. §1.5.2). Malheureusement on se trouve dans une situation où le domaine de résolution des équations de couple, on ne parle même pas des limites restreintes, n'est pas assez étendu pour permettre l'évaluation d'une valeur de rapport de couple. Pour pouvoir évaluer le profil, il faudrait que l'angle ϕ_r qui représente l'angle entre la première et la dernière position de roue d'entrée (qui porte le profil générateur r_1) pour lesquelles les équations de conjugaison ont pu être résolues soit plus grand ou au moins égal au pas de l'engrenage (p_1). Malheureusement ce profil ne permet pas de respecter cette condition et on se retrouve dans la situation inverse, l'angle ϕ_r est plus petit que le pas p_1 (cf Figure 6.21), ce qui veut dire que ce profil ne permet pas de conduire sur un pas en respectant une condition de couple. On n'a donc pas de solution pour le cas étudié avec le profil cosinus.

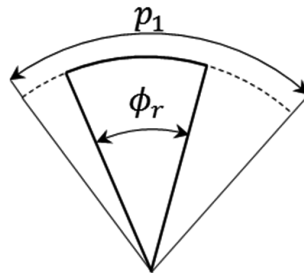


Figure 6.21: Illustration du domaine de résolution du profil cosinus

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a illustré avec un cas d'engrènement concret (une roue menante à 98 dents contre un pignon mené à 14 dents) de quelle manière le code élaboré pouvait être utilisé pour évaluer les performances nominales de l'engrènement ainsi que le comportement en présence d'erreurs de positionnement et de forme représentatives de celles trouvées en horlogerie. On a vu que pour le cas considéré, les erreurs d'alignement n'avaient que très peu d'importance par rapport aux imprécisions d'entraxe. Les erreurs de forme ont par contre un impact, bien que celui-ci soit moindre que celui des erreurs d'entraxe. On montre par cette application les capacités de l'outil informatique à réaliser une étude complète du comportement ciné-mato-statique d'un profil, même dans le cas d'erreurs relatives importantes.

Par la suite on a tenté de construire un engrènement à couple constant à partir de différents profils d'entrée pour une roue menante à 98 dents contre un pignon mené à 14 dents. On a vu que le profil NIHS2025 et le profil à développante conduisent à une solution, bien que les géométries ne puissent pas être utilisées telles quelles. On a également vu que le profil cosinus ne permettait pas d'obtenir une solution pour l'engrènement considéré. Les géométries proposées pour les profils conjugués peuvent certainement être améliorées, notamment en corrigeant les profils d'entrée. Si cela n'est pas envisageable, d'autres solutions sont peut-être plus intéressantes pour des entraxes différents. Tout cela est également à mettre en lien avec les impératifs de construction et d'assemblage qui peuvent également amener à choisir certaines valeurs de couple plutôt que d'autres.

Le code de génération permet beaucoup d'adaptations et supporte bien les différents profils. Toutefois, la méthode de calcul est très lente à déterminer qu'il n'existe pas de solution. Ainsi, le cas du profil cosinus a été bien plus long à évaluer (3-4x plus) que les cas du NIHS2025 et de la développante, alors qu'il n'y avait pas de profil à reconstruire. Sur le même ordinateur que celui utilisé pour les calculs présentés au §3.6, il faut compter environ 5 minutes de temps de calcul pour le cas du NIHS, et plus d'un quart d'heure pour le profil cosinus.

Chapitre 7 Banc d'essai

7.1 Introduction

Pour compléter le travail analytique et de simulation, notre partenaire industriel a souhaité le développement d'un banc d'essai qui permette la validation expérimentale des résultats de simulations d'engrenages obtenus grâce au programme décrit dans les chapitres précédents. La conception du banc d'essai et les essais de mise en train ont été réalisés en équipe et incluent entre autre des projets d'étudiants. Les diverses contributions à la conception du banc d'essai et à sa mise en service sont les suivantes :

- L. Jenni : étude préliminaire (cf.[46]) et étude dynamique du système commandé
- Projet d'étudiants de 5^{ème} semestre : solution de principe (cf. [47])
- Projet d'étudiants de 6^{ème} semestre : conception des couplemètres et première mise en œuvre de la solution de principe (cf.[48, 49])
- Y. Buntschu et A. Motamed : seconde mise en œuvre de la solution de principe et dimensionnement sur la base du cahier des charges (cf.[50-52])
- Partenaire industriel : fabrication des profils à tester
- M. Jeanneret et L.Chevalley : supervision de la conception, de la fabricabilité, et fabrication
- Atelier ATME (EPFL) : fabrication et montage du banc
- M.Valdemarin: réalisation des essais de mise en train et de validation.
- Q. Theurillat : chef de projet, supervision de la conception et des essais de mise en train et de validation, supervision de projets d'étudiants
- Dr. Grigorescu : supervision des projets d'étudiants et conception des broches
- Prof. Giovanola : supervision générale, conception du bâti, interprétation des résultats de validation, co-rédacteur du rapport final (cf.[53])

Les détails de la conception, de la fabrication, de la mise en train et de la validation du banc d'essai sont présentés dans un rapport technique distinct (cf.[53]). Les paragraphes suivants ne présentent qu'une description synthétique du banc et des résultats des essais de validation.

7.2 Définition fonctionnelle et cahier des charges fonctionnel

Le cahier des charges client établi avec l'entreprise partenaire et la pré-étude réalisée (cf.[46]) ont permis l'établissement de la fonction principale et du cahier des charges fonctionnel. Les deux paragraphes suivants (§ 7.2.1 et 7.2.2) sont repris du rapport final (cf.[53]) concernant le banc d'essai.

7.2.1 Description de la fonction principale

Le banc d'essai d'engrenage doit permettre de mesurer avec une précision/résolution et répétabilité prescrites,

- 1) la cinématique :
 - a. vitesse d'entrée et vitesse de sortie instantanées
 - b. rapport de transmission instantané
- 2) la statique :
 - a. couple d'entrée et couple de sortie
 - b. rapport de couple
 - c. couple de frottement
- 3) la puissance et l'énergie dissipées

d'un engrenage d'horlogerie, soit multiplicateur ou réducteur, comprenant une roue et un pignon, à axes nominalement soit parallèles, soit perpendiculaires (renvoi d'angle) dont :

- 1) l'entraxe est entaché d'erreurs
- 2) la position angulaire des axes est entachée d'erreurs
- 3) le profil des dentures peut être arbitrairement varié
- 4) le profil des dentures est entaché d'erreurs de forme et dimensionnelles

dans des conditions de vitesses de glissement de pression de contact des dentures proches de celles intervenant dans les dentures d'horlogerie, sans que le module soit nécessairement le même que les modules utilisés en horlogerie.

7.2.2 Cahier des charges fonctionnel

Après l'établissement du cahier des charges client, de la fonction principale et de la pré-étude, le cahier de charges fonctionnel a été établi. Celui-ci est présenté au Tableau 7.1.

Spécifications des engrenages à tester	
Module des dentures testées (mm)	3
Couple maximum à transmettre	10 Nm
Matériaux des roues et pignon	Laiton, Laiton au plomb, Acier Inox
<i>Spécifications géométriques de la roue :</i>	
Plage du nombre de dents	80 – 120
Plage correspondante du diamètre	240 – 360 mm
<i>Spécifications géométriques du pignon</i>	
Plage du nombre de dents	6 – 20

Plage correspondante du diamètre	18 – 60 mm
Rapport hauteur H /module m	Roue : 1.5 Pignon : 30
Rapports de transmission	Plage : 1/20-20
Fabrication	
Méthode de fabrication :	Réalisable en atelier conventionnel (tour, fraiseuse 3 axes interpolés, perceuse découpe au fil, découpe laser)
Précision d'usinage engrenages :	$\pm 30 \mu m$
Spécification pour les axes de roue et pignon	
Configurations:	<ul style="list-style-type: none"> • Engrenages plans • Renvois d'angle
Course imposable à chaque axe (minimum)	171 mm
Rotation (autour d'un axe perpendiculaire au plan défini par les axes de la roue et du pignon)	100°
Erreurs de positionnement imposables	
<ul style="list-style-type: none"> • Erreur de position d'entraxe • Parallélisme des 2 axes de rotation 	$\pm 3 mm$ Précision : $\pm 30 \mu m$ $\pm 1^\circ$ Précision : $\pm 0.002^\circ$
Mesures	
Cinématique : Rapport de vitesse instantané le long de l'engrènement	Résolution : 0.5%
Rendement instantané	Plage : 85-100% Précision : 0.5%
Variations de couple instantané	Plage : 80-100%
Résolution de la mesure de position	Min : 20pts/dents
Autres	
Vitesses de rotation : (Vitesses réelles $\in [0.0034 - 12]$ t/min)	A déterminer pour que la vitesse de glissement du modèle soit la même qu'à l'échelle 1 : 1
Roues et pignons interchangeables. Toutes les combinaisons doivent être possibles, autant en amplification qu'en réduction.	
Tests sur plusieurs profils et dimensions D_r et D_p	

Tableau 7.1: Cahier des charges fonctionnel

7.3 Description du banc

Le banc est composé de six axes (cf. Figure 7.1) :

- 2 axes en translation portant les axes des roues
- 2 axes en rotation pour l'introduction d'erreurs d'alignement, dont un permet de disposer les roues dans une configuration de renvoi d'angle
- 1 axe rotatif moteur réglé en vitesse portant la première roue dentée
- 1 axe rotatif freiné par un poids mort portant la seconde roue dentée

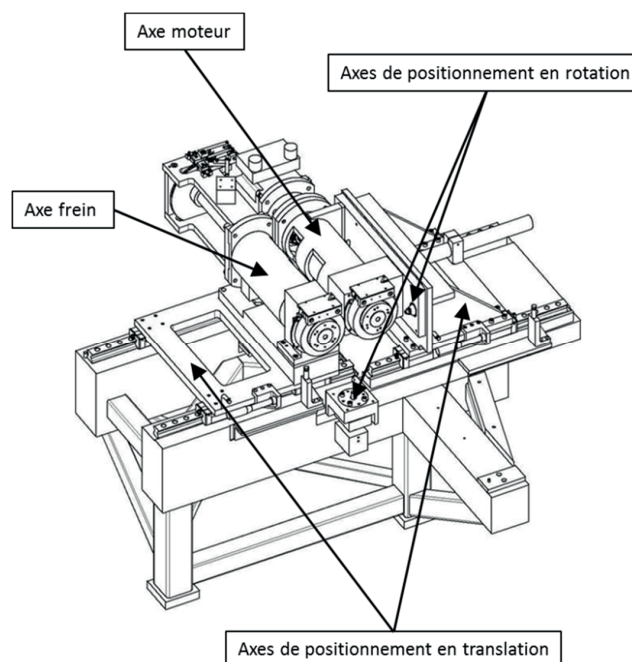


Figure 7.1: Disposition des axes du banc d'essai

Les axes en translation permettent le positionnement relatif des axes soutenant les roues dentées, l'introduction d'erreurs d'entraxe, et le positionnement du point de contact entre les roues au-dessus de l'axe permettant l'introduction d'erreurs d'alignement autour de l'axe z . Le schéma cinématique de la Figure 7.2 illustre les positions des axes. Ce positionnement permet d'introduire des erreurs d'alignement et d'entraxe de manière indépendante. De façon similaire, l'axe permettant l'introduction d'erreurs d'alignement, cette fois selon l'axe y , est situé à la même hauteur que les axes de rotation, toujours pour permettre un découplage des différentes erreurs.

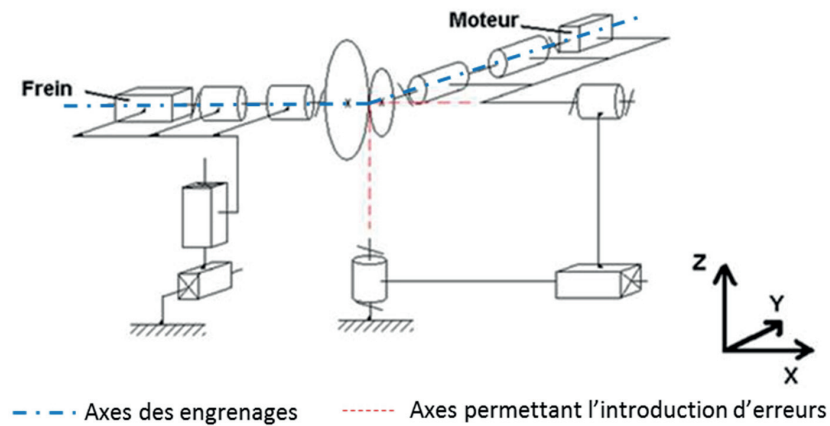


Figure 7.2: Schéma cinématique du banc d'essai (en position de renvoi d'angle)

Les axes portant les roues sont tous deux équipés de capteurs permettant la mesure :

- De la position en rotation

Cette mesure est effectuée par des codeurs fabriqués par l'entreprise *Heidenhain*. Il s'agit de capteurs de position angulaire optiques *ERP 8080* qui ont une précision de graduation d'une seconde ($1''$) d'arc.

- De l'effort de couple

Les couplemètres (voir Figure 7.3) ont été conçus et montés dans le laboratoire par MM. Y. Heimberg, Y. Rambeau et K. Agbeviade (cf. [48]). Le couple est mesuré au moyen d'un barreau cylindrique instrumenté avec des jauges tensométriques pour mesurer ses déformations lorsqu'il est soumis à la torsion pure. Les jauges tensométriques utilisées pour réaliser ces couplemètres ont été fabriquées par *HBM* (modèle : K-XY4-350-25-3-0), et collées par nos soins sur un axe en aluminium. La précision est de 1.14% de la pleine échelle, qui est prévue entre -10 et +10 [Nm].

L'ensemble des signaux est recueilli par une carte d'acquisition *National Instruments NI-USB 6212*.

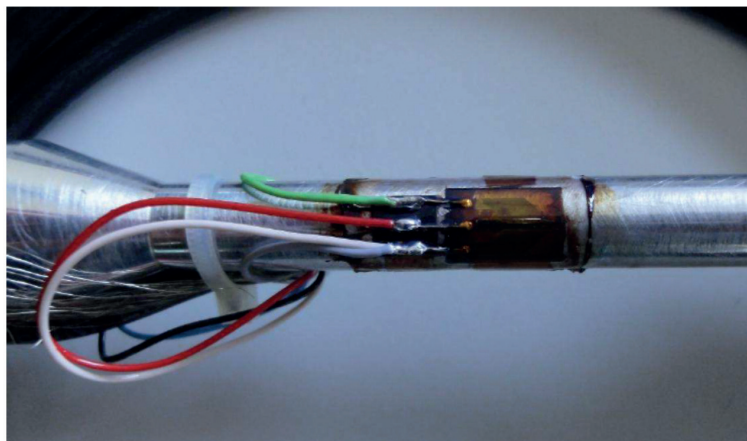


Figure 7.3 : Vue partielle d'un capteur de couple avec les jauges tensométriques ([48])

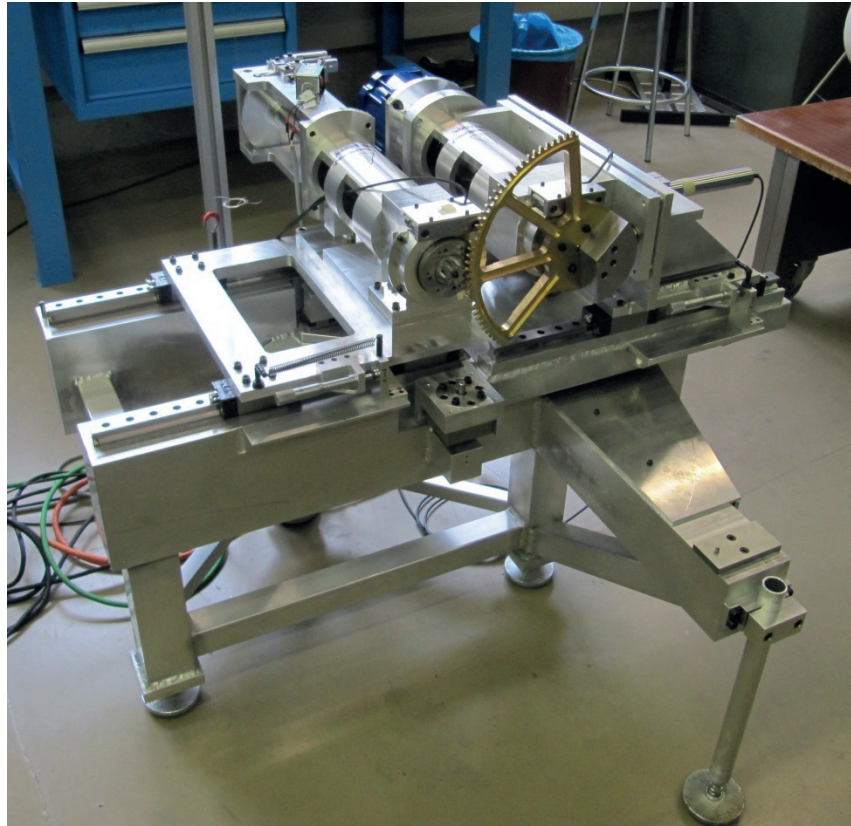


Figure 7.4: Banc d'essai finalisé en position engrenage plan (cf. [53])

Une fois l'ensemble du banc monté et mis en géométrie (cf. Figure 7.4), on a calculé les erreurs de positionnement des roues dues aux diverses incertitudes que l'on compile ici au Tableau 7.2.

Dénomination	Valeur
Entraxe	$\pm 20 [\mu m]$
Alignement horizontal	$0.0110 [^\circ]$
Alignement vertical	$0.0113 [^\circ]$

Tableau 7.2: Erreurs de positionnement

L'erreur d'entraxe provient des différents éléments assemblés qui provoquent chacun une incertitude. Ces incertitudes se somment pour atteindre une erreur totale de 2 centièmes. Les erreurs d'alignement dues aux assemblages peuvent, elles, être annulées grâce au système d'introduction d'erreurs. Toutefois, les précisions d'usinage des axes supportant les roues dentées ainsi que la précision d'usinage des roues en elles-mêmes provoquent malgré tout des imprécisions d'un peu plus d'un centième de degré.

7.4 Essais de validation [53]

Le banc d'essai a été conçu pour permettre au client de tester les performances des profils d'engrenages existants, ainsi que les futurs développements, obtenus ou non à l'aide de l'outil de calcul présenté dans ce texte. On n'a malheureusement pas pu faire une utilisation extensive du banc, mais on présente ici les essais et la démarche utilisés pour valider son fonctionnement.

On a commencé par caractériser son fonctionnement « à vide » afin de contrôler le niveau des couples de frottement (cf. §7.4.1)

On a ensuite enchaîné sur différents essais permettant de caractériser le fonctionnement du banc. Pour cela une série de paramètres ont été variés, et on s'est principalement attardé à suivre l'évolution de trois grandeurs dérivées :

1. Le rapport de transmission
2. Le rapport de couple
3. Le rendement

Grâce à ces trois valeurs, on valide le bon fonctionnement du banc, particulièrement en s'attardant sur :

- La conformité des résultats obtenus pour un profil à développante
- La reproductibilité des résultats pour différentes valeurs :
 - De charge
 - De vitesse

Les mesures doivent permettre d'observer une répétition du comportement d'une dent à l'autre, et mettre en évidence les spécificités du profil à développante, à savoir le rapport de transmission constant. On s'attend toutefois à ce que ce rapport ne soit pas constant tout le long de l'engrènement, le nombre de dents du pignon ne le permettant pas. On doit aussi pouvoir observer des variations du rapport de couple se répétant d'une paire de dent à l'autre, et passant à chaque fois par un maximum correspondant au moment du passage de la ligne des centres. Si ces points sont observables et quantifiables, alors on peut considérer que le banc d'essai fonctionne comme prévu.

7.4.1 Caractérisation simple des couples parasites

L'implantation des roulements sur les axes rotatifs supportant les roues, pour des raisons de précision, s'est faite au plus proche du support de la roue dentée. Malheureusement cette disposition ne permet pas de distinguer le couple de frottement généré par les paliers de celui provenant de l'engrènement. On a donc commencé par évaluer le couple de frottement généré par les paliers. Pour cela on effectue un aller-retour sur l'axe moteur portant la roue, sans que celle-ci soit accouplée à l'axe freiné. On enregistre la vitesse angulaire et le couple, ce qui nous permet d'obtenir la Figure 7.5. La Figure 7.5 a) présente la vitesse mesurée sur l'axe moteur en fonction de la position, alors que la Figure 7.5 b) présente le couple.

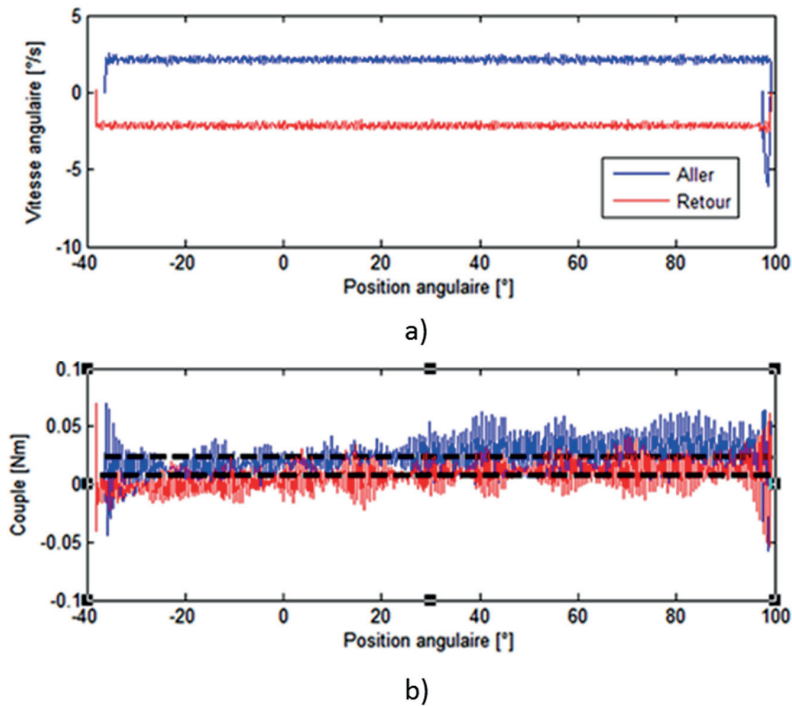


Figure 7.5: Evaluation du couple de frottement dans les paliers

On peut remarquer que la régulation du moteur fait son travail en maintenant l'axe à vitesse constante (Figure 7.5 a)). La différence moyenne entre les deux courbes de couple de la Figure 7.5.b) atteint la valeur de 0.016 [Nm] , ce qui indique que le couple de frottement est inférieur à 0.01 [Nm] soit la limite de précision du capteur. On observe par contre que les couples mesurés, autant à l'aller qu'au retour montrent une légère pente, ainsi que des valeurs presque constamment supérieures à 0. Ceci s'explique par la géométrie de la roue d'essai montée sur l'axe et visible à la Figure 7.4. On peut voir que celle-ci n'est pas complète, et qu'un balourd est rapporté pour équilibrer la roue et limiter le couple résiduel dû au centre de masse décentré de la roue d'essai. Malheureusement cet équilibrage n'est pas parfait, et ce sont ces effets qui provoquent cette légère pente et le couple résiduel visible à la Figure 7.5.

7.4.2 Conditions expérimentales pour la mise en train du banc d'essai et la validation de son comportement

Les essais de mise en train et de validation du banc ont été effectués avec une roue en bronze et un pignon en acier inoxydable à denture à développante de module 3 [mm] . On peut voir à la Figure 7.4 que la roue ne constitue qu'un segment de roue complète, muni d'un contrepoids pour l'équilibrer. Le segment de circonférence comporte plusieurs séries de 5 dents, chaque série ayant un profil différent. Le pignon a une denture complète. La Figure 7.6 illustre la configuration d'essai.

La roue (considérée complète) et le pignon ont un nombre de dents de 110 et 8, respectivement, ce qui correspond à un rapport de transmission nominal de 13.75^7 .

⁷ Ici on définit le rapport de transmission comme la vitesse de l'arbre porte pignon divisée par la vitesse de l'arbre porte roue.

La roue est montée sur l'axe entraîné par le moteur électrique, tandis que le pignon est monté sur l'axe de freinage.

On a testé l'engrenage avec les deux arbres nominalelement parallèles et un entraxe de 177 [mm], l'entraxe nominal.

Les dentures n'ont pas été lubrifiées pour ces essais.

Un poids mort, dont les valeurs ont été variées de 0 à 0.6 [Kg], appliquait un couple résistant dans une plage de 0 à 6 [Nm] sur la broche portant la roue. Dans cette configuration, il faut distinguer deux types d'essai :

- Essais à roue menante, lorsque le moteur et la roue entraînent le pignon et font monter le poids mort.
- Essais à pignon menant, lorsque le poids mort descend et est freiné dans sa chute par la roue et le moteur.

On a effectué les essais en imposant une vitesse de rotation constante à l'arbre moteur portant la roue. Des essais ont été réalisés pour une plage de vitesses entre 2 et 25 [%s].

Le taux d'échantillonnage pour l'acquisition des données était de 10 Hz.

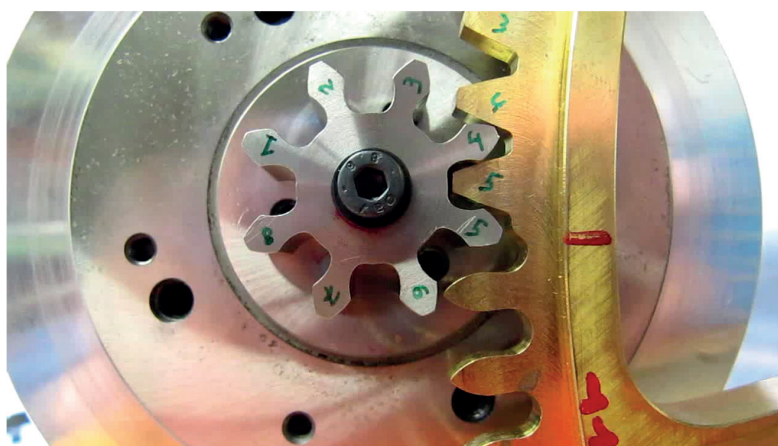


Figure 7.6: Vue parallèle aux axes de la configuration pignon-roue utilisée pour les essais de validation du banc d'essai (à noter les profils différents dans les parties supérieure et inférieure de la roue)

7.4.3 Conclusions tirées des essais de validation

Comme on peut le voir sur les différentes figures présentées dans le paragraphe suivant, les mesures sont entachées d'oscillations compliquant, de prime abord, la lecture des graphiques.

Cependant, comme la discussion des résultats le montre, ces oscillations reflètent le comportement réel de l'engrenage testé. Le banc s'avère donc opérationnel, et remplit presque parfaitement son cahier des charges, même s'il est perfectible. Il permet de suivre l'évolution du rapport de couple, du rapport de transmission et du rendement le long d'une dent, le tout avec une précision suffisante pour observer des variations locales. Il permet de voir que le comportement du rapport de transmission lorsqu'on engrène sur les profils à développante est constant, puis chute de manière importante dès que le contact se fait sur l'arête séparant la zone évidée du pied du pignon et le profil théorique. On a également pu observer les différences de comportement au niveau du couple et du rendement entre un essai à roue menante ou un essai à pignon

menant. Les essais effectués se sont avérés reproductibles, et, chose intéressante quant à notre supposition du modèle de frottement, les grandeurs dérivées étudiées sont indépendantes de la charge ou de la vitesse.

On a également identifié une série de problèmes, certains facilement solubles, d'autres moins.

Un des points qui gêne la lecture des résultats et la bonne marche des roues est le coincement intervenant lors de chaque passage de dent. Cet arrêt est provoqué par la géométrie du pignon utilisé. Les conditions de fonctionnement étant défavorables, principalement dû au faible nombre de dents du pignon, le contact se fait très tôt, notamment sur l'arête de tête du pignon. Le rayon de l'arête étant très faible, il a tendance à se coincer contre le flanc de la roue, provoquant un arrêt brusque de l'engrènement (visible à la Figure 7.7). Une meilleure géométrie du pignon, on pense à une augmentation du rayon de courbure de l'arête, devrait permettre de limiter ce phénomène.

Un autre point d'amélioration facilement envisageable est le logiciel d'acquisition. La carte utilisée ne permet pas la lecture simultanée des quatre capteurs, ce qui provoque un léger décalage temporel entre les différents signaux. On pourrait probablement améliorer les courbes représentant les rapports de couple et de transmission en utilisant les vraies valeurs temporelles. N'ayant pas prévu de mouvements très dynamiques lors de la conception du logiciel, on avait opté pour un temps unifié pour les quatre capteurs, c'est-à-dire une même valeur de temps pour tous les capteurs, correspondant au temps relevé pour le premier canal évalué.

La carte utilisée, bien qu'effectuant le travail correctement, a un taux d'acquisition très faible, ce qui a compliqué l'interprétation des courbes obtenues (transitoires rapides), et limite la vitesse de rotation utilisable.

Les dérives de couple observées lors des différents essais sont en partie imputables aux divers balourds, bien que ceux-ci n'expliquent pas la dérive du rapport de couple. Les variations de couple lentes observées au niveau du pignon peuvent s'expliquer par différents défauts de la ligne d'arbre du pignon, dont l'équilibrage n'a jamais été étudié, contrairement à la ligne d'arbre de la roue. La roue de charge soutenant le poids n'est pas forcément bien centrée et elle est portée par un arbre dont les roulements ont été choisis d'après des considérations économiques. Il est dès lors tout à fait compréhensible que le couple de charge varie sensiblement selon la position. Toutefois ces variations ne permettent pas d'expliquer la lente dérive observable sur le rapport de couple et sur le rendement. On n'a pas réussi à déterminer à quel phénomène cette dérive était imputable.

7.4.4 Exemple de résultats d'essais typiques

On présente un seul résultat d'essai, représentatif de l'ensemble des mesures effectuées pour la validation du banc d'essai. Il s'agit d'un essai à roue menante, avec un poids mort de 0.2 [kg], provoquant théoriquement un couple de 2[Nm] à l'arbre supportant la roue. La vitesse de rotation, rapportée au pignon, est de 2[°/s]. L'essai fut filmé afin de permettre la meilleure interprétation possible des résultats.

On commence par présenter à la Figure 7.7 l'évolution de la position angulaire du pignon. On peut observer sur l'agrandissement que le mouvement subit des arrêts de plusieurs secondes, et ceci à quatre reprises. Ces blocages se produisent lors du passage d'une dent à une autre. Ce phénomène a été corroboré par l'observation visuelle au moyen de l'enregistrement vidéo. On observe également que le mouvement en-dehors de ces zones d'arrêt n'est pas complètement uniforme : il présente de faibles oscillations.

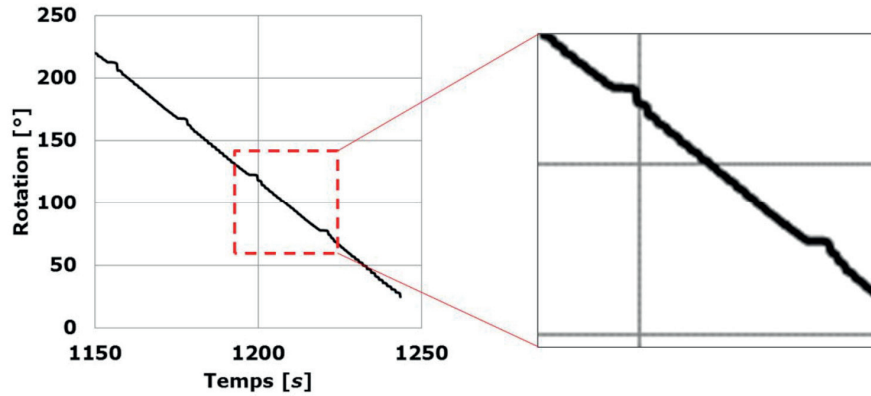


Figure 7.7: Rotation du pignon durant l'essai

Ces petites oscillations, qui à proprement parler n'en sont pas, s'observent mieux sur les mesures de couple, présentées en Figure 7.8. Il s'agit plutôt de brèves élévations de couple permettant de « débloquer » les dents en prise. Toutefois le mouvement n'est jamais complètement stoppé, sauf lors des passages de dents. On y voit également les différents passages de dents.

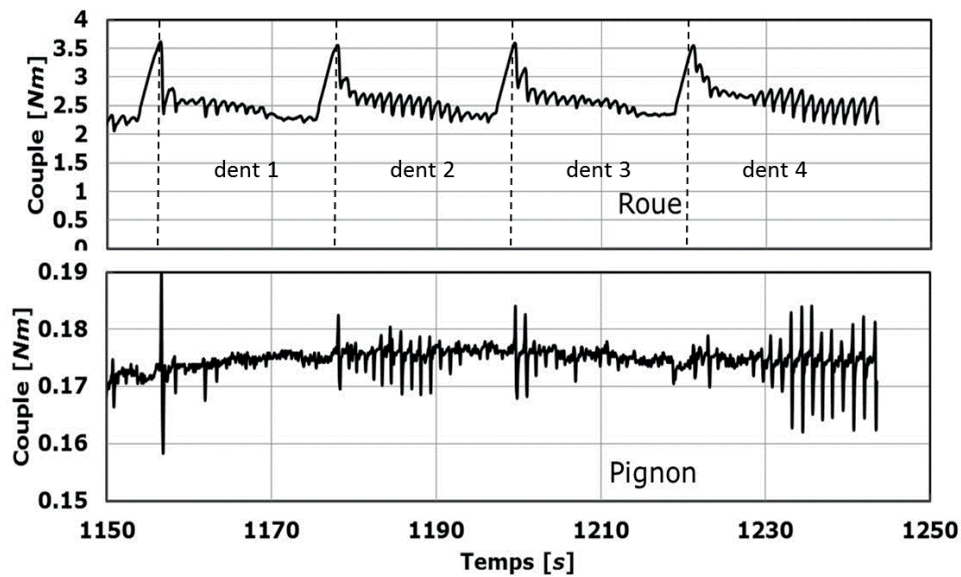


Figure 7.8: Exemple de résultat d'essai: mesures de couple (tiré de [53])

Les mesures d'angle ainsi que les mesures de couple permettent le calcul du rapport de transmission instantané ainsi que du rapport de couple instantané (cf. Figure 7.9), puis du rendement (cf. Figure 7.10). Les grandeurs représentées sont calculées grâce aux relations présentées de l'Équation 7.1 à l'Équation 7.3 ci-dessous.

Le rapport de transmission au temps t ($m_{21,t}$) se calcule grâce aux positions angulaires mesurées sur le pignon (ϕ_p) et sur la roue (ϕ_r), mais à deux temps différents (t et $t - 1$)

$$m_{21,t} = \frac{1}{i} = \frac{\phi_{p,t} - \phi_{p,t-1}}{\phi_{r,t} - \phi_{r,t-1}}$$

Équation 7.1

Le rapport de couple se calcule directement à partir des mesures de couple sur la roue ($C_{r,t}$) et le pignon ($C_{p,t}$).

$$r_{couple,t} = \frac{1}{j} = \frac{C_{r,t}}{C_{p,t}}$$

Équation 7.2

Le rendement se déduit finalement des deux rapports ($r_{couple,t}$ et $m_{21,t}$).

$$\eta_t = \frac{1}{r_{couple,t} m_{21,t}}$$

Équation 7.3

Le rapport de transmission et le rapport de couple sont représentés à la Figure 7.9. Le rapport de couple représenté, dû à l'utilisation d'un profil à développante et au sens de transmission (amplification) doit forcément être supérieur à 13.75, représenté par la ligne traitillée rouge. On peut voir que le résultat respecte en grande majorité cette condition.

Le rapport de transmission, puisqu'on a un profil à développante, devrait être constant sur l'ensemble de l'engrènement. On observe que le résultat obtenu ne correspond pas à cette attente. Toutefois, la courbe observée n'est pas étonnante, puisque le pignon ne possède que huit dents, ce qui n'est pas un cas favorable, car les pieds de dents du pignon ne suivent plus un profil à développante. La conséquence en est la chute de la valeur du rapport de transmission dès que le point de contact se positionne hors du profil désiré. Cette conclusion est confirmée par l'enregistrement vidéo.

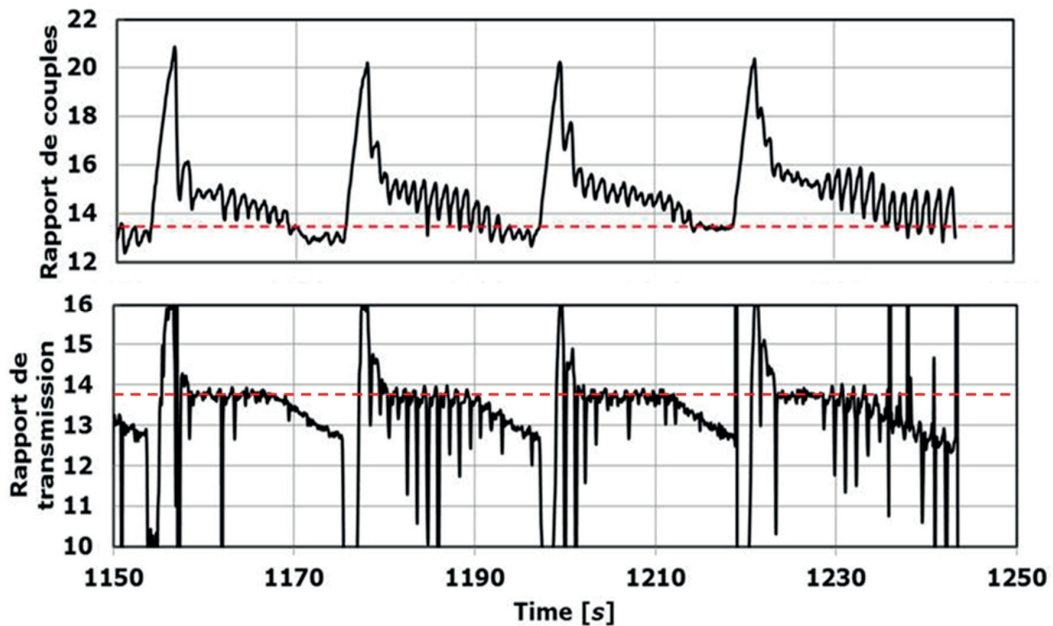


Figure 7.9: Exemple de résultat d'essai: Rapports de couple et de transmission (tiré de [53])

Le rendement instantané présenté à la Figure 7.10, a un comportement général proche de ce qui est attendu avec un profil global proche d'une dent de scie. On observe par contre une légère diminution des valeurs maximums du rendement, conséquence d'une pente légère sur le rapport de couple, due elle-même à une pente légère sur la mesure du couple.

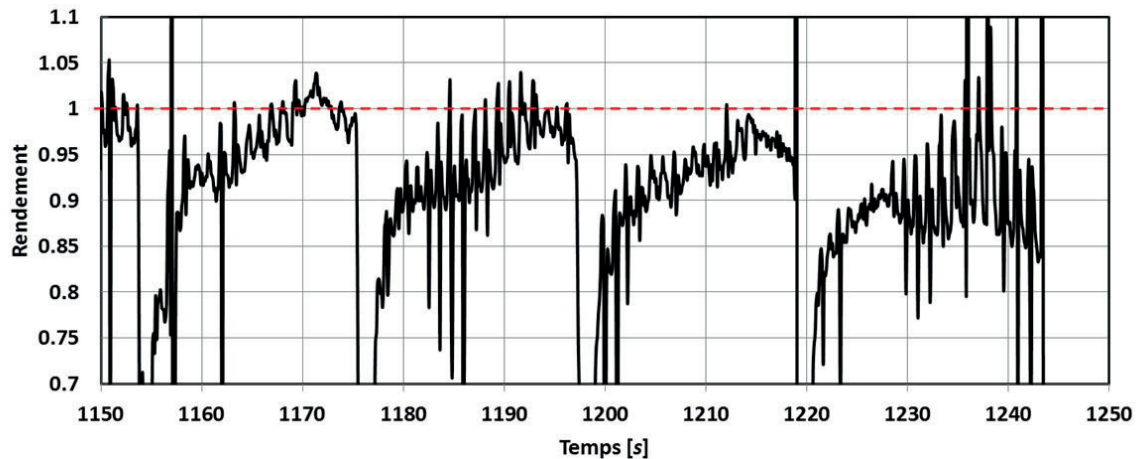


Figure 7.10: Exemple de résultat d'essai: Rendement (tiré de [53])

7.5 Conclusion

On a décrit dans ce chapitre le banc d'essai conçu dans le cadre de la thèse. Il permet de mesurer le rapport de couple et le rapport de transmission instantanés le long de l'engrènement, et d'évaluer l'influence d'erreurs d'alignement et d'erreurs d'entraxe, bien que la validation de cet aspect n'ait pas été réalisée. On a vu que la précision mécanique du banc était suffisante pour respecter les résolutions de mesure imposées. Après analyse détaillée des essais de validation, on a pu montrer que la précision de l'ensemble du banc, capteurs inclus, permettait d'évaluer le comportement de profils, et respectait le cahier des charges élaboré avec notre partenaire industriel. On a notamment pu observer qu'un engrènement de profils à développante de cercle d'une roue de 110 dents contre un pignon de 8 dents ne s'effectuait pas de façon régulière et présentait des discontinuités de mouvement, ce qui était attendu.

Faute de temps et surtout de main d'œuvre, les essais effectués sur le banc dans le cadre de la thèse furent limités à la validation de celui-ci, et n'ont pas permis de confirmer les comportements rapportés aux chapitres précédents.

Chapitre 8 Discussion et perspectives

8.1 Discussion

8.1.1 Résumé du travail

Le travail présenté dans les chapitres précédents permet de mieux comprendre le comportement cinématique et statique des engrenages non lubrifiés, ou à lubrification limitée. Sur l'ensemble du travail on a pu :

- faire une revue des différents profils de denture connus, conventionnels ou non, ainsi que des équations et méthodes existantes pour analyser ou concevoir les profils d'engrenages
- expliquer de quelle manière utiliser ces informations pour analyser le comportement des profils d'engrenage soumis ou non à différentes erreurs, que ce soit l'alignement des axes, l'entraxe, ou la forme des profils d'engrenages ;
- montrer comment la méthode d'analyse a été implémentée dans un code numérique et quelles méthodes ont été utilisées pour la simulation des profils et des erreurs ainsi que pour la résolution des équations de contact ;
- présenter les équations permettant de calculer un profil d'engrenage dit conjugué qui permet donc de transmettre une cinématique définie à l'avance. Le concept de conjugaison a été étendu à la transmission de couple, ce qui nous a permis de présenter une série d'équations permettant le calcul de profils *conjugués en couple*. Ce concept, d'abord établi en trois dimensions, a été spécialisé pour une utilisation bidimensionnelle, plus simple à traiter ;
- établir de quelle manière les équations de conjugaison doivent être traitées pour permettre le calcul d'un profil conjugué en couple capable de constituer un engrenage complet. On a ainsi vu que la seule résolution des équations de conjugaison ne permettait pas d'obtenir un profil satisfaisant, et qu'il fallait tenir compte du système engrenage complet, en ne se limitant pas qu'au profil lui-même. Ces considérations nous ont amenés à formuler une équation supplémentaire reliant le pas d'engrènement calculé par intégration du rapport instantané de transmission au rapport du nombre de dents ;
- présenter quelques applications de ce que l'on peut faire avec l'outil d'analyse, ainsi que quelques applications de la méthode de calcul du conjugué en couple. Le code de simulation et de génération a ainsi pu être validé. L'utilisation du code a permis de montrer que pour certains paramètres d'entrée le problème de la conjugaison en couple n'avait pas de solution (cas du profil cosine).

8.1.2 Contributions du travail de thèse

Les contributions principales de ce travail sont :

1. L'établissement d'une représentation générique des profils
2. Un outil informatique permettant l'analyse des performances d'engrenages avec des profils donnés
3. L'intégration d'erreurs pour l'analyse des performances des engrenages avec des profils donnés
4. L'établissement d'équations de conjugaison en couple en trois et deux dimensions
5. La mise en place d'une méthode permettant de passer du cas de la came au cas de l'engrenage conjugué en couple
6. Les techniques numériques pour l'implémentation de la conception d'engrenages conjugués en couple
7. La conception d'un banc permettant la mesure du comportement de profils non-conventionnels

En particulier, l'établissement d'une méthode et des équations qui y sont liées permettant de calculer un profil dit : « conjugué en couple » représente des contributions nouvelles. Cette méthode permet d'établir un profil d'engrenage permettant de respecter une condition de couple en lieu et place de la condition cinématique traditionnellement utilisée. Le domaine d'existence de solutions a été défini et son interprétation physique a été fournie. Des techniques numériques spécifiques pour la résolution du problème de la conjugaison en couple ont été soit développées soit adaptées qui permettent un traitement relativement efficace des équations.

8.1.3 Directives de conception

Les réflexions faites tout au long de ce travail de thèse nous ont permis de tirer deux groupes de règles pour guider la conception d'engrenages d'horlogerie.

8.1.3.1 Règle générale de conception

D'une manière très générale, pour un rapport de transmission donné il faut choisir le nombre de dents le plus élevé possible:

En augmentant le nombre de dents on limite la longueur du pas ce qui permet d'augmenter le rendement moyen en comparaison d'un engrenement avec un même rapport de transmission, mais avec un nombre de dents plus faible.

Cette directive a alors pour corollaire qu'il faut choisir le module le plus faible possible.

Les considérations statiques sur la valeur absolue du couple à transmettre imposeront des limites à la réduction du module et une procédure d'optimisation sera nécessaire.

8.1.3.2 Propositions concernant le calcul du conjugué

Les deux propositions qui suivent reposent sur l'intuition que nous avons développée durant cette recherche et n'ont pas été démontrée rigoureusement. Elles permettent d'augmenter le domaine des solutions possibles en augmentant l'écart entre les limites restreintes. Les deux règles se fondent sur des considérations énergétiques et ont pour objectif d'améliorer le rendement de l'engrenage

- Proposition 1 : Avoir le profil de dent d'entrée le plus « droit » possible afin de diminuer au maximum la longueur du trajet effectué sur les flancs de dents. Pour la développante on concrétise cette proposition en essayant d'avoir l'angle de pression le plus faible possible. Cela a pour effet de repousser un peu la limite restreinte énergétique, donc d'avoir des solutions de profil à rendement supérieur.
- Proposition 2 : Ne pas se limiter à l'entraxe nominal ; une solution intéressante peut exister pour d'autres valeurs d'entraxe. Là aussi, la limite restreinte énergétique peut être repoussée.

8.1.4 Critique

8.1.4.1 Analyse des profils

L'outil informatique mis au point pour l'analyse des profils est versatile et performant, mais pas très facile à prendre en main. Il reste perfectible, tant au niveau de la simplicité d'utilisation que des performances de calcul.

8.1.4.2 Codage des profils

Le codage des profils s'est effectué sur plusieurs implémentations du code d'analyse. Bien que la réflexion de base menée pour le codage des profils ait été longuement mûrie, l'architecture proposée pourrait être simplifiée, notamment en ce qui concerne les informations pour le calcul des erreurs de forme. On gagnerait en clarté de lecture, et le codage de nouveaux profils en serait simplifié.

8.1.4.3 Profils conjugués en couple

Bien que ce travail de thèse ait permis d'établir de quelle manière calculer un profil d'engrenage à couple constant fonctionnel, il n'a pas spécifié comment réaliser une dent complète, c'est-à-dire comment décrire le pied et la tête de dent dans une roue. Bien que plusieurs idées, abordées au §8.2, soient proposées pour terminer la conception d'une dent complète, elles n'ont pas été mises en application. Le code actuel, résultant du travail de thèse, n'est donc pas encore un produit fini et nécessite quelques compléments de programmation

8.2 Perspectives

8.2.1 Code

8.2.1.1 Points de rebroussement de la construction du conjugué en couple

La construction des profils conjugués en couple peut conduire à la création de points de rebroussement. La courbe ainsi générée n'est alors pas utilisable dans son ensemble.

Ces points de rebroussement, bien que géométriquement très similaires aux cas habituels d'interférence au taillage rencontrés notamment avec la développante, ne doivent pas être traités de la même manière pour ce qui nous intéresse ici.

L'interférence au taillage traditionnelle (cas de conjugaison cinématique) peut être déterminée à priori, et éventuellement être évitée (Voir [6]). Les cas traditionnels rencontrés sur la développante sont connus (voir [5, 6]). Ils découlent de la cinématique des engrenages conjugués en vitesse, et peuvent être traités simplement, puisqu'on connaît à priori les positions du profil d'entrée et de sortie.

Le problème qui nous intéresse pour la conjugaison en couple est différent, puisque les équations fournissant les points de contact ne sont pas directement liées à la cinématique.

Les équations de conjugaison en couple peuvent, selon les conditions, conduire à la création de profils conjugués physiquement irréalisables, ou du moins en partie. Le profil ne peut alors pas être utilisé tel quel. Il faut supprimer les zones inutilisables (cf. Figure 8.1). C'est là que les choses diffèrent du cas traditionnel. Dans le cas d'interférences générées par des profils construits à partir de la théorie des conjugués cinématiques, il est impossible de conserver la zone fermée, car la tête de la dent a besoin de cet espace, et sa conservation conduirait au blocage de l'engrenage. Mais ce blocage n'intervient que parce que le rapport de transmission cinématique est constant.

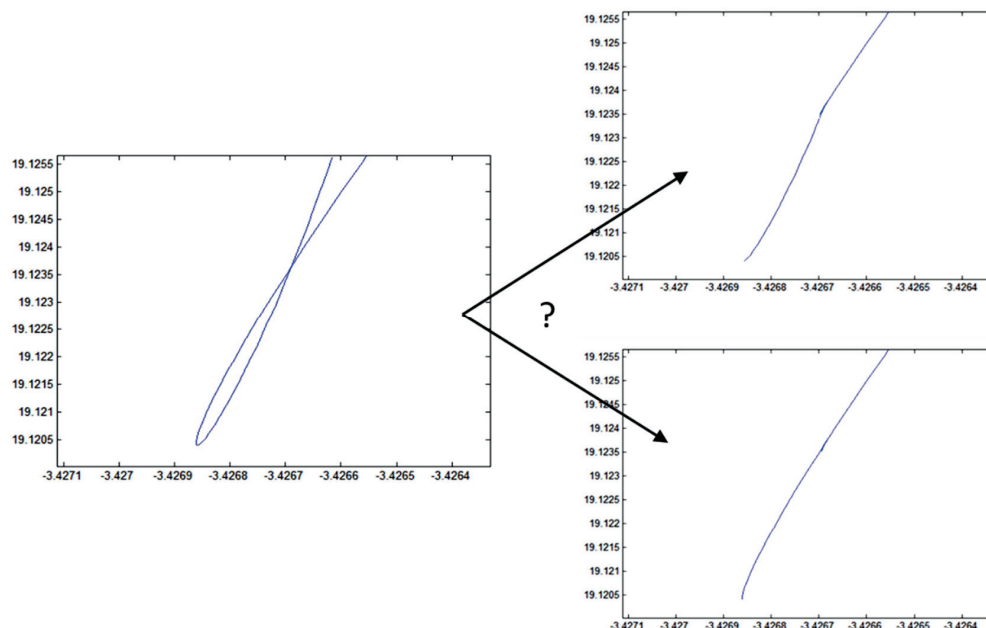


Figure 8.1: Illustration de la zone d'interférence et des corrections envisageables

Dans le cas de profils conjugués en couple, le rapport de transmission cinématique n'est pas connu à priori, et ne peut pas être une constante. L'interférence générée par la conjugaison en couple ne conduit pas nécessairement au blocage. Mais une partie de la courbe (après le point de rebroussement) doit également être supprimée, celle-ci n'étant pas physiquement réalisable (cf. Figure 8.2). Le critère permettant la détermination de la partie de la courbe à supprimer découlant d'un processus purement géométrique, les équations de couple n'interviennent pas. Il s'agit donc de calculer le conjugué « cinématique » avec le profil de vitesse obtenue de la conjugaison en couple, afin de déterminer la portion de profil à remplacer ou supprimer.

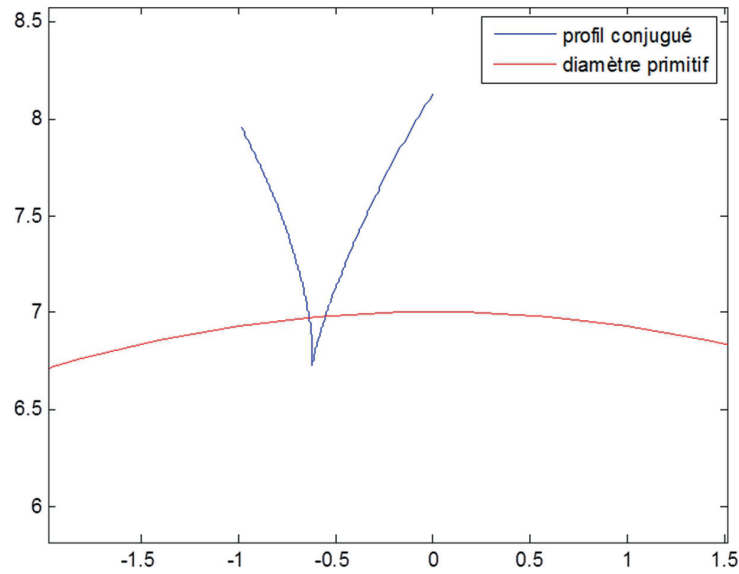


Figure 8.2: Problème de point de rebroussement sur le profil conjugué en couple de la développante (cas du Chapitre 6 : cf. Figure 6.19)

Il faut également « créer » (ou compléter) la partie manquante du profil entre les points calculés par la méthode des conjugués en couple jusqu'au point de rebroussement et le fond de dent, qui est une nécessité fonctionnelle. On voit bien à la Figure 8.3, que le profil conjugué calculé n'est pas défini jusqu'au diamètre de fond de dent. Le profil n'est donc pas complètement terminé.

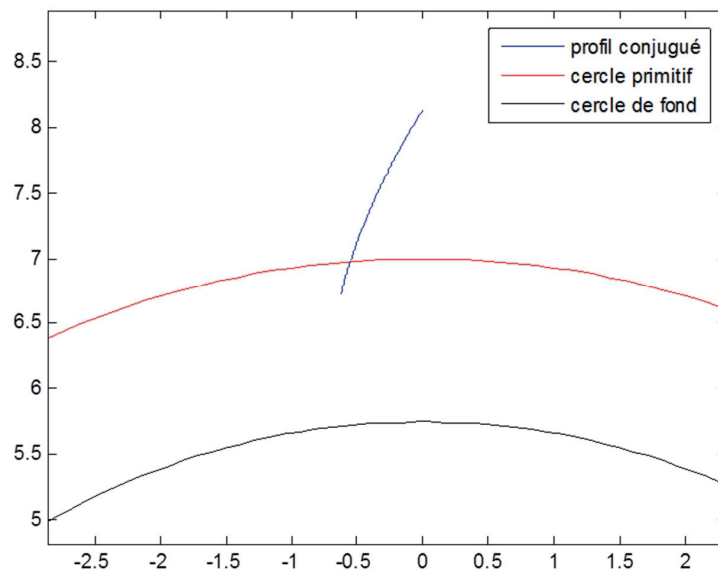


Figure 8.3: Profil présenté à la Figure 8.2, avec la zone après le point de rebroussement supprimée, et représentation du diamètre de fond de dent standard en mécanique ($h_f = 1.25 m$)

8.2.1.2 Reconstruction des profils à partir de plusieurs courbes

Une idée qui pourrait être intéressante à étudier pour la suite du travail sur le calcul des engrenages, et notamment si on s'intéresse à des engrenages tolérant des erreurs d'entraxe, serait de générer une série de plusieurs profils conjugués pour une même valeur de rapport j mais pour différents entraxes.

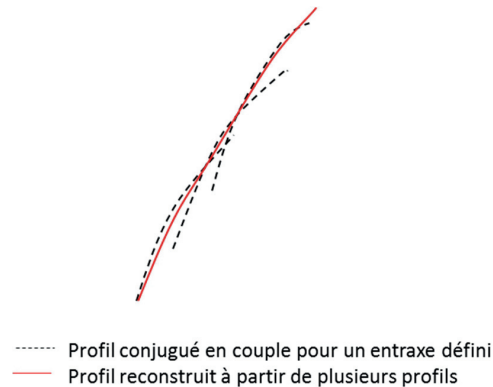


Figure 8.4: Illustration de l'idée du profil reconstruit à partir de plusieurs profils conjugués calculés pour des entraxes différents

On pourrait alors reconstituer la dent en adjoignant ces différents profils, ce qui pourrait éventuellement créer un profil plus tolérant aux erreurs que ceux calculés directement selon la méthode que l'on a proposée aux chapitres précédents.

8.2.2 Profils d'entrée

Un des problèmes du calcul des profils tel qu'on l'a abordé reste le profil d'entrée. Quel que soit le mode de conjugaison (cinématique/ en couple), on doit fournir un profil d'entrée qui servira de base au calcul. Si l'on aborde le problème de la conjugaison avec l'idée d'en optimiser les performances, alors on passera forcément par la modification du profil d'entrée. Il faut donc un profil qui soit paramétrable. Si la plupart des profils ont des paramètres que l'on peut modifier (angle de pression pour la développante, cercles générateurs pour la cycloïde), il serait peut-être plus intéressant de partir d'un profil décrit par une spline (B-spline, ou courbe de Bézier [54]) avec peu de paramètres d'entrée, qui deviendront eux-mêmes les paramètres d'optimisation.

8.2.3 Optimisation

Les besoins de l'horlogerie en engrenages sont extrêmement variés. Pour répondre à ces différents besoins, la logique conduit à la conception de différents profils, respectant chacun leurs propres critères de performance. Le respect d'une condition stricte de couple ou de vitesse à un étage d'engrènement précis n'est pas forcément la solution la plus efficace pour l'amélioration des performances globales d'un mouvement. On imagine que l'optimisation des profils d'engrenage d'horlogerie peut s'effectuer à deux niveaux :

1. La paire de roues
2. La chaîne d'engrènement

L'optimisation de paires simples peut être intéressante pour l'amélioration des performances de l'engrenage. On optimisera alors le profil. L'optimisation de la chaîne passe par contre par le choix des performances des différents étages. Les performances des étages, issues de l'optimisation globale de la chaîne serviront ensuite de critères d'optimisation pour chacune des paires de roues (étages) de la chaîne et pour la conception de nouveaux profils pour chaque étage.

8.2.4 Evolution envisageable de la technique de calcul du conjugué cinématique/en couple

La compréhension gagnée durant l'élaboration de cette thèse nous indique que le problème global de l'engrenage, quel que soit la manière dont il est abordé, tourne autour de quatre fonctions :

1. r_1 : la fonction définissant le premier profil
2. r_2 : la fonction définissant le deuxième profil
3. i : la fonction définissant le rapport de transmission instantané
4. j : la fonction définissant le rapport de couple instantané

Les premiers chapitres ont traité de l'analyse des profils, donc essentiellement de la recherche de i et j compte tenu de r_1 et r_2 . On a ensuite présenté la théorie qui permet le calcul de r_2 et j compte tenu de r_1 et i , puis notre développement permettant le calcul de r_2 et i à partir de r_1 et j . On résume schématiquement ces combinaisons de paramètres à la Figure 8.5.

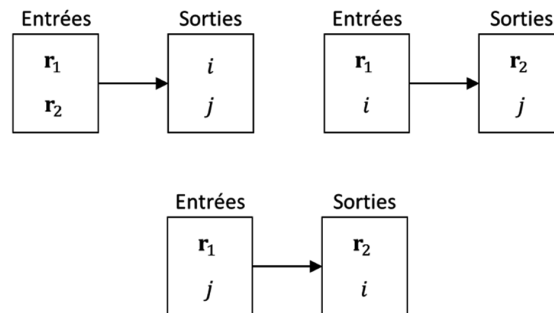


Figure 8.5: Combinaisons de paramètres de calcul évaluées

On se rend compte alors qu'il manque une des combinaisons, celle qui serait peut-être la plus intéressante : le calcul de r_1 et r_2 compte tenu de i et j . (Figure 8.6)

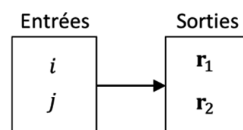


Figure 8.6: Combinaison de paramètres de calcul manquante

On n'a pas abordé ici la résolution de cette configuration du problème qui nous semblait être complexe. On est cependant persuadé qu'une solution pourrait être trouvée. Cette configuration permettrait d'établir les performances des profils, puis d'en déduire leur géométrie, ce qui serait de loin la manière la plus logique et élégante d'établir des profils d'engrenage.

8.2.5 Généralisation des méthodes développées

Les méthodes et principes développés au cours de ce travail peuvent être étendus au-delà des éléments présentés. Le code actuel est tout à fait capable de supporter des conditions de transmission (statique ou cinématique) non constantes, donc dépendantes de l'angle de rotation ($j = j(\phi_1)$ ou $i = i(\phi_1)$), mais qui doivent être les mêmes pour toutes les paires de dents.

Il est également envisageable d'imaginer construire, sur les mêmes bases, des profils avec des rapports de transmission cycliques sur un tour (ou moins). Le problème doit alors se résoudre pas à pas. Il faut en premier lieu déterminer les formes de base, (les formes qui vont servir de support) et qui seront différentes d'un cercle. On reprend à la Figure 8.7 une figure déjà présentée au Chapitre 5 qui permet d'illustrer cette approche.

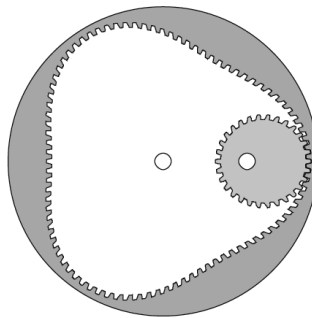


Figure 8.7 : Reprise de la Figure 5.5 (Exemple d'engrenage non-circulaire (tiré de [44]))

Pour ce type d'engrenages, les rapports de transmission cinématique et les rapports de couple doivent être adaptés pour chaque pas de l'engrenage. Il est tout à fait envisageable d'utiliser les théories mises en place dans la thèse pour ce genre d'engrenages, mais les méthodes de calcul utilisées pour le calcul de profils conjugués en couple doivent être adaptées pour correspondre au cas de rapports de transmission « moyen » (le terme est ici mal choisi, mais on le maintient pour garder la correspondance avec les chapitres précédents) variant avec l'angle de rotation.

Il est également envisageable d'utiliser cette méthode avec des modèles de frottement différent du modèle coulombien utilisé, les équations de conjugaison restant valables. L'outil de résolution serait alors à revoir si des informations comme la pression de contact ou la vitesse de glissement devenaient des paramètres nécessaires au calcul du coefficient de frottement.

Les techniques utilisées peuvent également être envisagées pour le calcul de cames qui, vues d'une manière simplifiée, sont un cas extrême d'engrenage où le pas vaut une circonférence complète.

Conclusion

Le travail exposé dans cette thèse a été réalisé en partenariat avec une grande manufacture horlogère. On a respecté au mieux les objectifs établis au début du projet, à savoir :

1. L'analyse du fonctionnement des profils horlogers existants
2. La formulation d'équations nécessaires au calcul de profils conjugués à partir de conditions différentes
3. La mise au point d'une méthode de conception alternative de profils d'engrenage

L'analyse du fonctionnement des profils a pu se faire grâce au programme de calcul, qui permet (et a permis) de réaliser une étude des profils utilisés par notre partenaire, et permet d'évaluer les conséquences sur les performances des tolérances de positionnement et de fabrication. Cette analyse a mis en évidence les améliorations possibles des profils horlogers actuels. Afin que le programme puisse être facilement utilisé et complété par notre partenaire, la définition des profils a été mûrement réfléchie, et une formulation générale a été mise en place. Cette formulation a également été utilisée pour la génération des profils.

La seconde partie du programme permet de calculer de nouveaux profils à partir de conditions différentes, notamment des conditions de couple, ce qui permet à notre partenaire d'imaginer d'autres formes de profils plus adaptés aux besoins de l'horlogerie. Ceci a pu se faire grâce aux équations et à la méthode établies lors de ce travail.

Bien qu'il ne fût pas initialement prévu, un banc d'essai a également été conçu, construit et évalué expérimentalement. Il permet la caractérisation de profils dont la cinématique n'est pas nécessairement constante. Il permet également l'évaluation expérimentale de l'incidence des tolérances sur les performances des engrenages.

La contribution principale de la thèse reste toutefois l'établissement d'une méthode permettant le calcul de profils dits : « conjugués en couple ». Elle permet le calcul d'un profil permettant l'engrènement selon une condition de couple, à partir d'un premier profil arbitraire. Cette méthode élargit l'arsenal de la théorie des engrenages et propose une alternative de calcul aux horlogers, qui n'ont pas nécessairement les mêmes besoins ni les mêmes conditions de fonctionnement que les autres industries employant cet élément de transmission.

Pour clôturer la thèse, on émet le souhait de voir ce travail être utile à notre partenaire industriel, et que les suggestions faites pour la suite de ce travail inspirent de futures recherches.

Bibliographie

1. Gille, B., *Les mécaniciens grecs: la naissance de la technologie*. 1980, Paris: Seuil. 229.
2. Diderot and D'Alembert, *Encyclopédie*. Vol. 2. 1765.
3. Camus, M., *Cours de mathématique, Eléments de mécanique statique*. 1752, Paris: Imprimerie Royale.
4. Dooner, D.B., *On the Three Laws of Gearing*. Journal of Mechanical Design, 2002. **124**(4): p. 733-744.
5. Henriot, G., *Engrenages*. 8 ed. Mécanique et matériaux. 2007, Paris: Dunod. 885.
6. Litvin Faydor L. , A.F., *Gear Geometry and Applied Theory*. 2 ed. 2004: Cambridge University Press. 800.
7. Dooner, D.B. and A.A. Seireg, <<The>> *kinematic geometry of gearing a concurrent engineering approach*. 1995, New York [etc.]: Wiley. XV, 450 S.
8. Spinnler, G., *Organes de transmission-Volume 3*. Aout 1993, EPFL: Lausanne.
9. Fayet, M., *On the Reverse of One Property of Involute Gears*. Journal of Mechanical Design, 2002. **124**(2): p. 330-333.
10. Bricard, R., in *Leçons de Cinématique*, Gauthier-Villars, Editor. 1926: Paris. p. 254-257.
11. ANSI/AGMA, *Gear Nomenclature, Definition of Terms with Symbols*. 2011.
12. Xianying, F., W. Aiqun, and L. Lee, *Study on the design principle of the LogiX gear tooth profile and the selection of its inherent basic parameters*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2004. **24**(11): p. 789-793.
13. Luo, S., Y. Wu, and J. Wang, *The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive*. Mechanism and Machine Theory, 2008. **43**(12): p. 1543-1556.
14. Defossez, L., *Théorie Générale de l'Horlogerie*. Vol. 1. 1950, La Chaux de Fonds: La chambre suisse de l'horlogerie. 316.
15. Laboulaye, C., *Traité de cinématique théorique et pratique ou Théorie des mécanismes (Troisième édition revue et complétée)*. 1878.
16. Di Puccio, F., M. Gabiccini, and M. Guiggiani, *Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach*. Mechanism and Machine Theory, 2006. **41**(4): p. 382-404.
17. Radzevich, S.P., *Theory of gearing*, ed. T.F. Group. 2013, New York: CRC Press.
18. Spitas, V., T. Costopoulos, and C. Spitas, *Fast modeling of conjugate gear tooth profiles using discrete presentation by involute segments*. Mechanism and Machine Theory, 2007. **42**(6): p. 751-762.
19. Litvin, F.L. and I.H. Seol, *Computerized determination of gear tooth surface as envelope to two parameter family of surfaces*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. **138**(1-4): p. 213-225.
20. Litvin, F.L., et al., *Computerized generation and simulation of meshing of modified spur and helical gears manufactured by shaving*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001. **190**(39): p. 5037-5055.
21. Litvin, F.L., et al., *New version of Novikov-Wildhaber helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002. **191**(49-50): p. 5707-5740.
22. Bracci, A., et al., *Geometric contact pattern estimation for gear drives*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009. **198**(17-20): p. 1563-1571.
23. HH, F.d.l.h.h. [cited 2009 09.12]; Available from: <http://www.hautehorlogerie.org/fr/encyclopedie/montre-mecanique/decomposition-mouvement/rouage.html>.
24. Stettler, C., *Analyse et simulation de la transmission de l'énergie dans un microsystème*, in *SSC 52ème Congrès*. 1977. p. 413-417.
25. Belot, M., *Les engrenages horlogers: Les nouvelles méthodes pour répondre à des besoins différenciés*, in *Société suisse de chronométrie 63ème congrès*. 1995: Grenchen. p. 15-22.
26. Helfer, J.-L., *Profil d'engrenage à couple constant*, E. SA, Editor. 15.05.2012: Switzerland.
27. Bureau des normes de l'industrie horlogère suisse, *NIHS: recueil de normes et formulaire technique destiné aux élèves des écoles techniques*. 1999, Bureau des normes de l'industrie horlogère suisse NIHS, c/o FH.

28. Li, S., *Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears*. Mechanism and Machine Theory, 2007. **42**(6): p. 698-726.
29. Simon, V., *Influence of tooth errors and misalignments on tooth contact in spiral bevel gears*. Mechanism and Machine Theory, 2008. **43**(10): p. 1253-1267.
30. Li, S., *Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications*. Mechanism and Machine Theory, 2007. **42**(1): p. 88-114.
31. Argyris, J., A. Fuentes, and F.L. Litvin, *Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002. **191**(11-12): p. 1057-1095.
32. Karpat, F.E.-O., Stephen; Cavdar, Kadir; Babalik, Fatih C., *Dynamic analysis of involute spur gears with asymmetric teeth*. International Journal of Mechanical Sciences, 2008. **50**(12): p. 1598-1610.
33. Xu, H., Kahraman, A., Anderson, N. E., Maddock, D. G., *Prediction of Mechanical Efficiency of Parallel-Axis Gear Pairs*. Journal of Mechanical Design, 2007. **129**(1): p. 58-68.
34. Petry-Johnson, T.T., Kahraman, A., Anderson, N. E., Chase, D. R., *An Experimental Investigation of Spur Gear Efficiency*. Journal of Mechanical Design, 2008. **130**(6): p. 062601-10.
35. NIHS.
36. Rieder, M.M.e.M., *Programmation orientés objets en C++*. 2ème ed. 2007, Lausanne: PPUR.
37. *Matlab: User's Guide*. 2011, The MathWorks.
38. Powell, M.J.D., *A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations*, in *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. 1970, P.Rabinowitz.
39. Bierlaire, M., *Introduction à l'optimisation différentiable*. 2006, Lausanne: Presses Polytechniques et universitaires romandes.
40. Perruchoud, L., *Analyse des engrenages horlogers, Rapport de stage*. 2012.
41. Bittle, W. GJK. 2010 [cited 2013 13.06.2013]; Available from: <http://www.codezealot.org/archives/88>.
42. Wu, D.-r. and J.-s. Luo, *geometric theory of conjugate tooth surfaces*. 1992, Singapore: World Scientific. VIII, 192 S.
43. Troyanov, M., *Cours de Géométrie*. 1 ed. Enseignement des mathématiques. 2009, Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes. 357.
44. Winkler, P., *Utilisation d'engrenages non-circulaires en horlogerie*, in *Journée d'étude SSC*. 2009: Lausanne.
45. Alfio Quarteroni, F.S., *Scientific Computing with MATLAB*. Texts in Computational Science and Engineering, ed. Springer. Vol. 2. 2003, Berlin: Springer.
46. Jenni, L., *Conception d'un banc d'essai pour engrenage, Pré-étude*. 2011, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
47. Pernet, P., Pierret, Fleury, *Projet de conception 5ème semestre: rendu final*. août 2011, EPFL-SGM: Lausanne.
48. Heimberg, Y. and Y. Rambeau-Bysath, *Projet Homofaber, Rendu Final (partie couplemètre)*. 2012, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
49. Aymon, A. and P. Hornick, *Projet Homofaber, Rendu final (partie conception générale)*. 2012, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
50. Motamed, A., *Electrical configuration of the electrical box of gear test bench*. 2012, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
51. Buntschu, Y., *Complément du rapport de Projet Homofaber*. 2013, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
52. Jenni, L., *Frein de blocage pour banc d'essai d'engrenage*. 2012, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
53. Buntschu, Y., Motamed, A., Theurillat, Q., Jenni, L., Agbeviade, K., Giovanola J. Jeanneret, M., Heimberg, Y., Rambeau, Y., Aymon, A., Hornick, P., Grigorescu, R., Kremer, D., Pernet, Pincet, Pierret, et Valdemarin, M., *Banc d'essai pour la caractérisation des performances d'engrenages: rapport de conception et de mise en train*. 2015, EPFL-STI-IGM-LCSM: Lausanne.
54. Piegl, L. and W. Tiller, *The NURBS book*. 2nd ed. 1997, Berlin: Springer.
55. Mattia, G., *Description mathématique et analyse de l'engrènement de profils d'engrenages autres qu'à développante*. 2012, EPFL: Lausanne.

ANNEXES

A. Preuve du théorème de Camus [3]

Cette annexe présente une reformulation de la preuve du théorème de Camus. Dans un premier temps on présente la preuve telle que Camus l'a présentée dans son ouvrage. Pour ne pas trahir sa pensée, on réutilise ses propres termes et la figure qu'il avait alors présentée. La seconde partie de cette annexe reprend ce travail et présente une version plus actuelle de la preuve du théorème.

La preuve que Camus propose dans son ouvrage est présentée pour les profils cycloïdaux. Suivant la démarche de Camus et selon les notations de la Figure A. 1, on dispose trois cercles X, R et Y, de centre B, F et G respectivement). Les cercles X et R sont les cercles primitifs et les cercles de base (confondus lors de profils cycloïdaux), et le cercle Y le cercle générateur. Le point E appartient à Y et est le point générant l'épicycloïde C-E sur R et l'hypocycloïde H-E sur X. Le point A est le centre instantané de rotation. Tout se passe donc comme si Y roule sur R et à l'intérieur de X, et que X roule sur R. A l'instant t_0 E, C et H sont confondus. La Figure A. 1 représente le système à l'instant t_a .

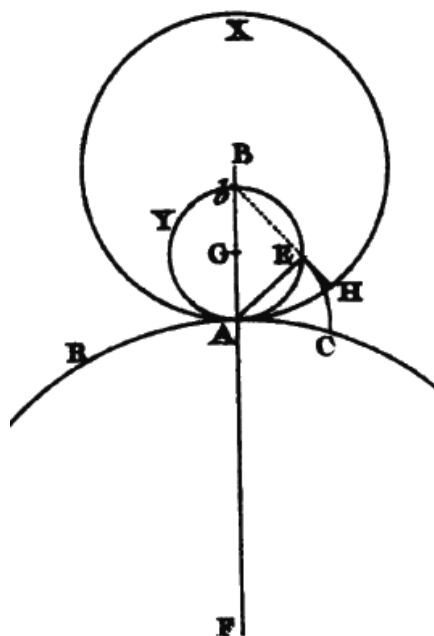


Figure A. 1 : Disposition des cercles (reproduction de la figure 182 de [3])

A l'origine, Camus fait sa preuve en deux parties distinctes.

La première montre qu'un point d'un cercle roulant sur un autre, décrit une courbe dont la perpendiculaire passe forcément par le centre instantané de rotation. Pour le montrer, on note que, localement, la droite A-E, est le rayon de courbure de la courbe au voisinage du point E. C'est donc, que la perpendiculaire en ce point passe forcément par A, puisque la perpendiculaire à un arc de cercle est son rayon.

La deuxième partie montre le lien de conjugaison entre l'hypocycloïde et l'épicycloïde. Si on applique la première partie de la preuve simultanément à l'épi- et l'hypocycloïde des cercles R et X, on obtient un point de contact avec des profils ayant une normale commune qui passe par le centre de rotation. Pour montrer que cette condition est suffisante, Camus fait la proposition suivante :

« [...]Quand deux cercles R, X se toucheront continuellement, et que l'un obligera l'autre à tourner en l'entraînant par le point d'attouchement A, si l'on imagine un rayon B-H (note : écrit à l'origine pour le cas particulier des hypocycloïdes droites. Imaginer ici non pas le rayon B-H mais la courbe H-E) dans le cercle X, et qu'ayant fait A-C=A-H on décrive par le point C pris pour origine, une roulette extérieure C-E (note : roulette ici désigne l'épicycloïde) qui ait pour cercle générateur un cercle Y [...], le rayon B-H (note : la courbe H-E) pendant le mouvement des deux cercles R, X, touchera toujours la roulette C-E au point E où cette roulette sera coupée par la droite A-E perpendiculaire à la courbure (note : courbure désigne une courbe dans le vocabulaire actuel). Ainsi au lieu de supposer que l'un des deux cercles R, X entraîne l'autre par le point d'attouchement A, l'on pourra pousser le rayon B-H (note : la courbe H-E) du cercle X par une roulette C-E attachée au cercle R, et décrite par le mouvement du cercle Y [...], on pourra aussi réciproquement faire pousser l'épicycloïde C-E attachée au cercle R, par un rayon BH (note : la courbe H-E) du cercle X et par le moyen de l'épicycloïde C-E et du rayon B-H (note : la courbe H-E), les deux cercles R, X, pourront le conduire comme s'il s'entraînoient par le point d'attouchement A. »⁸

Afin de montrer de manière plus rigoureuse qu'il suffit que la droite perpendiculaire aux profils soit celle alignée comme la droite A-E pour que la cinématique soit respectée, considérons la Figure A. 2 qui décrit les vitesses au point de contact.

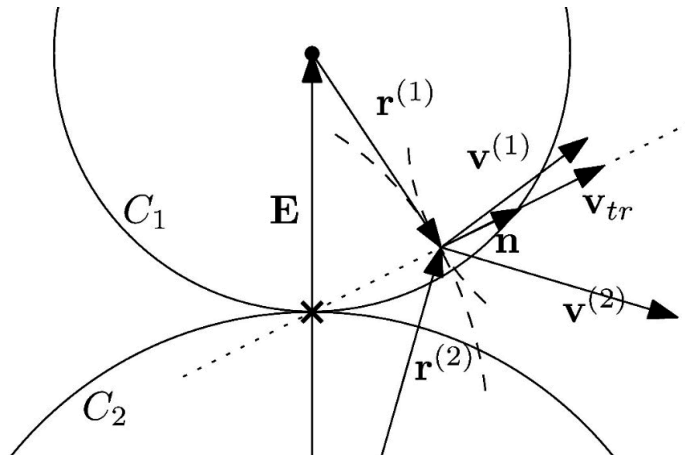


Figure A. 2 : Schéma des vitesses au point de contact

Les vitesses $\mathbf{v}^{(1)}$ et $\mathbf{v}^{(2)}$ sont les vitesses des profils attachés à C_1 et C_2 , et la vitesse \mathbf{v}_{tr} est la « vitesse transmise ». \mathbf{v}_{tr} ne peut être que perpendiculaire aux surfaces au point de contact. Si la roue menante est C_2 , alors \mathbf{v}_{tr} est la vitesse transmise à C_1 , donc qui impose le mouvement de C_1 . C'est donc la direction de cette vitesse qui va conditionner le rapport de transmission, puisque celui-ci est indépendant de la norme de la vitesse. Donc pour que la transmission se fasse au rapport désiré, la norme de la vitesse importe peu, mais son orientation est primordiale. C'est elle qui va déterminer les bras de levier, et le rapport des longueurs des bras de levier va déterminer le rapport de transmission. Admettons les vitesses de rotations $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ des cercles C_1 et C_2 respectivement. Imaginons les vecteurs $\mathbf{r}^{(2)}$, $\mathbf{r}^{(1)}$ et \mathbf{E} (voir Figure A. 2) équivalents à \overrightarrow{FE} , \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{FB} (voir Figure A. 1). On a la relation:

⁸ Citation du paragraphe 542 de 3. Camus, M., *Cours de mathématique, Eléments de mécanique statique*. 1752, Paris: Imprimerie Royale.

$$\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{E} = \mathbf{r}^{(1)}$$

Équation A. 1

Si on impose une cinématique avec un rapport de transmission m_{21} (qui tient compte du sens de rotation) tel que :

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = m_{21} \boldsymbol{\omega}^{(1)}$$

Équation A. 2

On a les relations :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} &= \mathbf{v}^{(1)} \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{r}^{(2)} &= \mathbf{v}^{(2)} \end{aligned}$$

Équation A. 3

Si on projette ces deux vitesses sur la normale unitaire \mathbf{n} , on a la vitesse transmise \mathbf{V}_{tr} qui doit être la même pour C_2 et C_1 (puisque l'on transmet une vitesse par obstacle il ne peut y avoir pénétration, et on suppose qu'il n'y a pas décollement) :

$$\mathbf{v}_{tr} = (\mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

Équation A. 4

En exprimant l'égalité représentée à l'Équation A. 1 uniquement en fonction des éléments de la roue C_1 en utilisant les relations présentées de l'Équation A. 2 à l'Équation A. 4, on a :

$$\left[\left(m_{21} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times (\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{E}) \right) \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} = \left((\boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}$$

Équation A. 5

On peut réécrire l'Équation A. 5 sous la forme suivante :

$$\left[\left[\left(m_{21} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times (\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{E}) \right) - \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Équation A. 6

Puisque la normale \mathbf{n} ne peut être le vecteur nul, alors on peut déduire :

$$\left[\left(m_{21} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times (\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{E}) \right) - \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{n} = 0$$

Équation A. 7

De là, en utilisant les propriétés du produit mixte, on peut réarranger l'Équation A. 7 de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \left[\left((m_{21} - 1) \mathbf{r}^{(1)} + m_{21} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} \right] = 0$$

Équation A. 8

Puisqu'on fait l'étude de notre cas dans le plan, et qu'à part $\boldsymbol{\omega}_1$ (non nul), tous les vecteurs de l'Équation A. 8 en font partie, alors $\left[\left((m_{21} - 1) \mathbf{r}^{(1)} + m_{21} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} \right]$ est colinéaire à $\boldsymbol{\omega}_1$. On a donc forcément que :

$$\left((m_{21} - 1) \mathbf{r}^{(1)} + m_{21} \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Équation A. 9

Ce qui veut dire que le vecteur décrit par $\left((m_{21} - 1) \mathbf{r}^{(1)} + m_{21} \mathbf{E} \right)$ est colinéaire à \mathbf{V}_g et à \mathbf{n} , et qu'il décrit lui aussi une normale (non unitaire cette fois) aux profils au point de contact.

Cherchons maintenant le point d'intersection de la droite formée par la ligne des centres (F-B, vecteur \mathbf{E}) et la droite formée par le point de contact des profils et le vecteur \mathbf{V}_g . Si l'on prend la référence au point F (centre du cercle C_2), on peut écrire l'équation du point d'intersection (\mathbf{P}_{int}) des droites de la manière suivante :

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = \mathbf{r}^{(2)} + \beta \left[(m_{21} - 1) \mathbf{r}^{(1)} + m_{21} \mathbf{E} \right] = \gamma \mathbf{E}$$

Équation A. 10

Avec β et γ les paramètres des droites.

On obtient alors avec l'Équation A. 9 et l'Équation A. 10 :

$$(1 + \beta(m_{21} - 1)) \mathbf{r}^{(1)} + (\beta m_{21} + 1 - \gamma) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Équation A. 11

Comme \mathbf{E} et $\mathbf{r}^{(1)}$ ne sont pas colinéaires, on a :

$$\begin{cases} \beta m_{21} + 1 - \gamma = 0 \\ 1 + \beta(m_{21} - 1) = 0 \end{cases}$$

Équation A. 12

Et donc :

$$\left. \begin{aligned} \beta m_{21} + 1 &= \gamma \\ \beta &= \frac{-1}{(m_{21} - 1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{m_{21}}{(1 - m_{21})} + 1 = \frac{1}{1 - m_{21}}$$

Équation A. 13

On voit ainsi que la position de ce point sur la ligne des centres ne dépend que du rapport de transmission, et que si celui-ci est constant, alors ce point est le même tout au long de l'engrènement. Admettons la relation suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{R}^{(1)}$$

Équation A. 14

Similaire à l'Équation A. 1, avec toutefois $\mathbf{R}^{(2)}$ et $\mathbf{R}^{(1)}$ étant cette fois les vecteur \overrightarrow{FA} et \overrightarrow{BA} (voir Figure A. 1) respectivement, qui sont un cas particulier de $\mathbf{r}^{(2)}$ et $\mathbf{r}^{(1)}$. On a donc, puisque les cercles C_2 et C_1 roule l'un sur l'autre, la relation suivante :

$$m_{21}\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)}$$

Équation A. 15

Et ainsi avec l'Équation A. 14 et l'Équation A. 15 on a :

$$\mathbf{R}^{(2)} = \frac{1}{1 - m_{21}} \mathbf{E}$$

Équation A. 16

Ce qui correspond à ce qu'on a trouvé en Équation A. 13 et décrit le *point de tangence des cercles primitifs*. On a donc que si le rapport de transmission est constant, alors la droite normale aux profils passant par le point de contact, passe toujours par le point de tangence des cercles primitifs, appelé communément *pôle*.

Une fois montré qu'un cercle roulant sur et à l'intérieur des cercles primitifs forme bien des profils conjugués, on peut alors étendre le théorème aux autres formes de corps générateurs. On peut le faire très simplement, puisqu'il existe, pour n'importe quelle figure qu'on ferait rouler, un cercle, tangent aux deux cercles primitifs et, par conséquent, à la figure quelconque, qui passe par le point de génération (désigné auparavant comme le point E). Le problème ne posant pas de restriction autre, notamment sur le rayon du cercle, alors n'importe quelle figure roulant sur les cercles primitifs est susceptible de générer des profils conjugués.

B. Exemple d'application de la théorie des profils conjugués: la cycloïde

Supposons un profil r_1 qui soit une hypocycloïde, ainsi qu'une loi de transformation m_{21} qui soit celle d'un engrenage plan (Figure B. 1). On va chercher le profil conjugué r_2 :

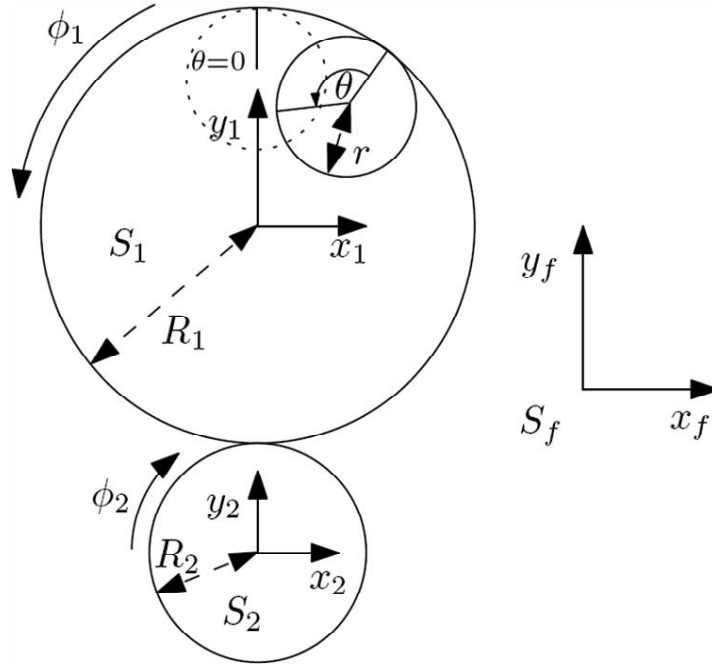


Figure B. 1 : Disposition des éléments nécessaires à la génération de la cycloïde

Pour une hypocycloïde on a :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} (R_1 - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \\ (R_1 - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Équation B. 1

Et la transformation entre S_1 et S_2 :

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} \cos((1+\alpha)\phi_1) & -\sin((1+\alpha)\phi_1) & 0 & (R_1 + R_2) \sin \alpha \phi_1 \\ \sin((1+\alpha)\phi_1) & \cos((1+\alpha)\phi_1) & 0 & -(R_1 + R_2) \sin \alpha \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Équation B. 2

Avec $\alpha = \frac{1}{m_{21}} = \frac{R_1}{R_2}$

Pour \mathbf{r}_2 on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{M}_{21} \mathbf{r}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} \left[(R_1 - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \right] \cos((1 + \alpha) \phi_1) - \left[(R_1 - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \right] \sin((1 + \alpha) \phi_1) + (R_1 + R_2) \sin(\alpha \phi_1) \\ \left[(R_1 - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \right] \sin((1 + \alpha) \phi_1) + \left[(R_1 - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R_1 - r}{r} \theta \right) \right] \cos((1 + \alpha) \phi_1) - (R_1 + R_2) \cos(\alpha \phi_1) \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Équation B. 3

Ensuite, on applique l'équation de conjugaison (Équation 4.4, rappelée à l'Équation B. 4 sous sa forme bidimensionnelle),

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \times \mathbf{n}_z \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi_1} = 0$$

Équation B. 4

et on trouve :

$$\cos \left(\frac{R_1}{2r} \theta \right) = \sin \left(\phi_1 + \theta - \frac{R_1}{2r} \theta \right)$$

Équation B. 5

Il existe alors 2 solutions pour l'Équation B. 5 :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{R_1}{2r} \theta = \phi_1 + \theta - \frac{R_1}{2r} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \phi_1 \\ 2) \quad & \frac{R_1}{2r} \theta + \frac{\pi}{2} = \phi_1 + \theta - \frac{R_1}{2r} \theta \Rightarrow \theta = \left(\phi_1 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{r}{R_1 - r} \end{aligned}$$

Équation B. 6

Si on utilise la première solution proposée à l'Équation B. 6 pour simplifier \mathbf{r}_2 on trouve :

$$\mathbf{r}_2 = r \begin{pmatrix} \sin \left(\frac{R_1}{r} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{R_2}{r} + 1 \right) \alpha \phi_1 \right) \\ \cos \left(\frac{R_1}{r} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{R_2}{r} + 1 \right) \alpha \phi_1 \right) \\ u/r \\ 1/r \end{pmatrix} + (r + R_2) \begin{pmatrix} \sin \alpha \phi_1 \\ -\cos \alpha \phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Équation B. 7

Ce qui est l'équation d'une épicycloïde dont le point de départ dépend du rapport $\frac{R_1}{r}$. Le rayon du cercle générateur est r et le cercle autour duquel il roule a pour rayon R_2 .

La deuxième solution est la suivante :

$$\mathbf{r}_2 = (R_1 - r) \begin{pmatrix} \cos \left[\frac{r}{r - R_1} \frac{\pi}{2} + \left(\frac{R_2}{R_1 - r} + 1 \right) \alpha \phi_1 \right] \\ \sin \left[\frac{r}{r - R_1} \frac{\pi}{2} + \left(\frac{R_2}{R_1 - r} + 1 \right) \alpha \phi_1 \right] \\ u / (R_1 - r) \\ 1 / (R_1 - r) \end{pmatrix} + (R_1 + R_2 - r) \begin{pmatrix} \sin(\alpha \phi_1) \\ -\cos(\alpha \phi_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Équation B. 8

Il s'agit aussi d'une épicycloïde, mais cette fois le cercle générateur a pour rayon $R_1 - r$.

La première solution est celle connue comme l'engrenage cycloïdal qui est utilisé dans l'horlogerie.

La deuxième solution est une solution mathématique qui n'a pas d'application physique. Cette solution est éliminée si on applique les conditions de non-interférence.

C. Exemple de codes Matlab

Dans cette annexe on présente quelques exemples de code Matlab.

On commence par un exemple de *class* complètement générique permettant de voir la structure du code.

On détaille ensuite, en prenant pour exemple un profil NIHS2002, le constructeur ainsi que les *methods* d'initialisation et de réinitialisation.

Le dernier exemple montre le code utilisé pour décrire les flancs de dents des profils bidimensionnels.

Exemple *class* :

```
classdef Exemple

    properties

        % Déclaration des propriétés

        Propriete_1;

        Propriete_3;

        %Déclaration de propriété avec initialisation de la valeur

        Propriete_2=0;

    end

    methods

        %Déclaration des méthodes

        function [valeur_sortie]=method_1(argument1, argument2)

            %code de la méthode

            valeur_sortie= argument1*argument2/Propriete_1+Propriete_3 ;

        end

        %constructeur

        function obj=Exemple(arg1,arg2,...)
```

```

        %code constructeur

        obj.Propriete_3=obj.Propriete_1*arg1;

    end

end

end

```

Exemple *propriétés* : NIHS 2002

```

properties

    %information roue ou pignon

    type_roue    %chaîne de caractère pour décrire si on a affaire à une
                  % roue ou un pignon

    %fond et tête de dent

    centre_fond_dent= [0,0];
    rayon_fond_dent=0;
    centre_tete_dent=[0,0];
    rayon_tete_dent=0.01;

    %Attributs de la norme (voir NIHS 2002)

    nbre_dents_pignon

    da
    df
    ha
    hf
    rho

```

```

s
c
centre_ogive=[0,0];
angle_droite_pied

%Points de liaison (passage d'un type de courbe à un autre)
    %les points sont écrits avec les coordonnées de la courbe
    %considérée. Comme les courbes sont planes, une seule coordonnée
    %suffit pour la déterminer, ces points contiennent la valeur de
    la coordonnée pour la courbe à droite, puis la courbe à gauche (il y a donc 2
    valeurs par variable)

    pt_fond_dent
    pt_fond_dent_dedendum
    pt_dedendum_addendum
    pt_addendum_tete_dent
    pt_tete_dent

end

%propriétés du profil définies (pour m=1) dans la norme pour le calcul
des
%éléments
properties(GetAccess = 'private', SetAccess = 'private')
    prop_tab_pignon = [ 1.64    1.64    1.52    1.52    1.52    1.44;
                        3.2     3.3     3.4     3.45    3.5     3.6;
                        1.05    1.05    0.95    0.95    0.95    0.85;
                        1.10    1.10    1.10    1.10    1.10    1.10;
                        0.4     0.4     0.4     0.4     0.4     0.4;];
    prop_tab_roue = [ 2.4     2.5     2.6     2.65    2.7     2.8;
                     2.8     2.7     2.6     2.55    2.5     2.4;
                     2       2       2       2       2       2;

```

```

1.6      1.6      1.6      1.6      1.6      1.6;
0.52     0.53     0.54     0.515    0.49     0.48;];

index_pignon

end

```

Exemple de constructeur : NIHS_2002

Certaines *properties* doivent absolument figurer dans la classe pour que le code fonctionne, cela même si elle n'a pas forcément de sens pour la *class*. Ces *properties* sont les suivantes :

pas_angulaire:	pas angulaire de la roue
jeu_angulaire:	jeu angulaire
diam_primitif:	diamètre primitif
hauteur:	hauteur du profil (pour les profils plans extrudés)
module :	module de l'engrenage
pts_transitions :	vecteur contenant les valeurs des abscisses curvilignes aux transitions de courbes.
jacobs :	vecteur contenant les valeurs relatives des longueurs des différents segments de courbes formant le profil.

```

function obj=NIHS_2002(b,c,d,e,f) %constructeur: Calcul les différents attributs du profil d'après les données entrées: module, n_bre de dent, hauteur, type de roue (pignon/roue),nbre_dent du pignon

```

```

obj.module=b;
obj.nbre_dents=c;
obj.hauteur=d;
obj.diam_primitif=b*c;
obj.type_roue=e;
if strcmp(e,'roue')
    obj.nbre_dents_pignon=f;
elseif strcmp(e,'pignon')

```



```
        obj.nbre_dents_pignon=c;
end

obj.diam_primitif=b*c;

if obj.nbre_dents_pignon>10
    obj.index_pignon=6;
else
    obj.index_pignon=obj.nbre_dents_pignon-5;
end

if strcmp(e,'roue')
    obj.ha = obj.module*obj.prop_tab_roue(1,obj.index_pignon)/2;
    obj.hf = obj.module*obj.prop_tab_roue(2,obj.index_pignon)/2;
    obj.rho = obj.module*obj.prop_tab_roue(3,obj.index_pignon);
    obj.s = obj.module*obj.prop_tab_roue(4,obj.index_pignon);
    obj.c = obj.module*obj.prop_tab_roue(5,obj.index_pignon);
elseif strcmp(e,'pignon')
    obj.ha                                     =
obj.module*obj.prop_tab_pignon(1,obj.index_pignon)/2;
    obj.hf                                     =
obj.module*obj.prop_tab_pignon(2,obj.index_pignon)/2;
    obj.rho = obj.module*obj.prop_tab_pignon(3,obj.index_pignon);
    obj.s = obj.module*obj.prop_tab_pignon(4,obj.index_pignon);
    obj.c = obj.module*obj.prop_tab_pignon(5,obj.index_pignon);
end

obj.da=obj.module*(obj.nbre_dents+obj.ha*2);
obj.df=obj.module*(obj.nbre_dents-obj.hf*2);

%-----%
```

```

%Calcul des centres des rayon d'ogive et de fond de dent
%(calcul selon NIHS 2010)

obj.centre_ogive(1)=obj.rho-obj.s/2;

obj.centre_ogive(2)=obj.da/2-sqrt(obj.rho^2-
obj.centre_ogive(1)^2);

r1=norm(obj.centre_ogive);

alpha=pi()/obj.nbre_dents;

beta=alpha-asin(obj.rho/r1)+asin(obj.centre_ogive(1)/r1);

obj.rayon_fond_dent=(obj.df*sin(beta))/(2*(1-sin(beta)));

r2=obj.df/2+obj.rayon_fond_dent;

obj.centre_fond_dent(1)=-r2*sin(alpha);

obj.centre_fond_dent(2)= r2*cos(alpha);

obj.angle_droite_pied=pi()/2+alpha-beta; %angle de la droite de
pied de dent

%-----%

obj=obj.INIT();

```

Exemple *method* INIT (initialisation) : NIHS 2002

```

function obj=INIT(obj)

%-----%

obj.da=obj.module*(obj.nbre_dents+obj.ha*2);

obj.df=obj.module*(obj.nbre_dents-obj.hf*2);

```

```

%Calcul des centres des rayon d'ogive et de fond de dent
%(calcul selon NIHS 2010)

obj.centre_ogive(1)=obj.rho-obj.s/2;
obj.centre_ogive(2)=obj.da/2-sqrt(obj.rho^2-
obj.centre_ogive(1)^2);
r1=norm(obj.centre_ogive);
alpha=pi()/obj.nbre_dents;
beta=alpha-asin(obj.rho/r1)+asin(obj.centre_ogive(1)/r1);
obj.rayon_fond_dent=(obj.df*sin(beta))/(2*(1-sin(beta)));
r2=obj.df/2+obj.rayon_fond_dent;
obj.centre_fond_dent(1)=-r2*sin(alpha);
obj.centre_fond_dent(2)= r2*cos(alpha);

obj.angle_droite_pied=pi()/2+alpha-beta; %angle de la droite de pied
de dent

%-----%

%Calcul des points spéciaux (liens entre les différentes
%courbes)

%point de départ du cercle de fond de dent

obj.pt_fond_dent=-(pi()/2-alpha);

%point entre le fond de dent et la droite de pied de dent
x0=[obj.pt_fond_dent;0];
centre_droite=[0,0];

```

```
f=@(x) INTERSECTION_CERCLE_DROITE(x,obj.rayon_fond_dent,obj.centre_fond_dent,obj.
angle_droite_pied,centre_droite);

    op-
tions=optimset('NonlEqnAlgorithm','dogleg','MaxFunEvals',10000,'TolX',1e-
12,'TolFun',1e-12);

    x=fsolve(f,x0,options);

    obj.pt_fond_dent_dedendum=x;

    clear x

    %point entre la droite et l'ogive

    x0=[pi();obj.pt_fond_dent_dedendum(2)];

    centre_droite=[0,0];

f=@(x) INTERSECTION_CERCLE_DROITE(x,obj.rho,obj.centre_ogive,obj.angle_droite_pie
d,centre_droite);

    x=fsolve(f,x0,options);

    obj.pt_dedendum_addendum(1)=x(2);

    obj.pt_dedendum_addendum(2)=x(1);

    clear x

    %point entre l'ogive et le cercle de tête anti-problème

    x0=[obj.pt_dedendum_addendum(1);0];

    centrex=0;

F=INTERSECTION_CERCLE_CERCLE(x0,obj.rho,obj.centre_ogive,obj.rayon_tete_dent,cen
trex);

    obj.centre_tete_dent(1)=centrex;

    obj.centre_tete_dent(2)=F(3);

    obj.pt_addendum_tete_dent(1)=F(1);

    obj.pt_addendum_tete_dent(2)=F(1);

    clear x
```

```

        %point final (sommet de la dent)

    obj.pt_tete_dent= pi()/2;

    %-----%

    obj.jeu_angulaire=obj.angle_droite_pied;

    %informations complémentaires pour le calcul des erreurs de
    %profil

    obj.pts_transitions=[-2;-1;0;1;2];

    obj.lg_profil=zeros(length(obj.pts_transitions)-1);

    n=1;

    [pos0,trsh]=obj.PROFIL([-2;0]);

    for i=-1.999:0.02:2

        [pos1,trsh]=obj.PROFIL([i,0]);

        if (i>obj.pts_transitions(n)) && (i<obj.pts_transitions(n+1))

            obj.lg_profil(n)=obj.lg_profil(n)+norm(pos1-pos0);

        else

            n=n+1;

        end

        pos0=pos1;

    end

    for nn=1:length(obj.lg_profil)

obj.jacobs(nn)=obj.lg_profil(nn)/sum(obj.lg_profil(:));%norm(obj.lg_profil);

    end

end

```

Exemple *method* RE_INIT

```
function obj=RE_INIT(obj,err)

    f_err=inline(err,'x','y');

    err_2=f_err(2,0);
    err_m2=f_err(-2,0);
    err_2_2=f_err(0,2);
    err_m2_2=f_err(0,-2);

    if -err_2>=obj.rayon_tete_dent
        obj.rayon_tete_dent=abs(err_2)*1.1;
        %obj.ha=obj.ha+err_2*1.5;
    elseif -err_2_2>=obj.rayon_raccord_face
        obj.rayon_raccord_face=abs(err_2_2)*1.01;
    elseif -err_m2_2>=obj.rayon_raccord_face
        obj.rayon_raccord_face=abs(err_m2_2)*1.01;
    end

    obj=obj.INIT();

end
```

Code du flanc :

```
else % problème 3D

    D_int=1/norm(D_int)*D_int; % tangente au profil 2D
    D_perp_int=cross(ez,D_int);

    if vect_param(2)>-1 && vect_param(2)<1 % calcul du flanc droit
```

```

z= obj.hauteur/2*(vect_param(2));

Dz=[0;0;1;]; % tangente du flanc

elseif vect_param(2)>=1 && vect_param(2)<=2 % Calcul arête du
haut

theta=(vect_param(2)-1)*pi()/2;

z=obj.hauteur/2+obj.rayon_raccord_face*sin(theta);

F=F+D_perp_int*obj.rayon_raccord_face*(1-cos(theta));

ang_corr=acos(dot(ey,D_int)/norm(dot(ey,D_int)));

if abs(dot(ey,D_int))<0.01

    ang_corr=acos(-
dot(ex,D_int)/norm(dot(ex,D_int)))+pi()/2;

end

Dz=[-cos(pi()/2-theta);0;sin(pi()/2-theta)];

Dz=Trans([ang_corr;0;0;0;0],Dz);

elseif vect_param(2)<=-1 && vect_param(2)>=-2 % Calcul arête du
bas

theta=(vect_param(2)+1)*pi()/2;

z=-obj.hauteur/2+obj.rayon_raccord_face*abs(sin(theta));

F=F+D_perp_int*obj.rayon_raccord_face*(1-abs(cos(theta)));

ang_corr=acos(dot(ey,D_int)/norm(dot(ey,D_int)));

if abs(dot(ey,D_int))<0.01

    ang_corr=acos(-
dot(ex,D_int)/norm(dot(ex,D_int)))+pi()/2;

end

Dz=[-cos(pi()/2-theta);0;sin(pi()/2-theta)];

```

```
Dz=Trans([ang_corr;0;0;0;0],Dz);  
else % Calcul haut et bas de la dent  
    Dz=[sym*sign(vect_param(2));0;0];  
    if vect_param(1)==2  
        Dz=[-sign(vect_param(2));0;0];  
    end  
  
z=sign(vect_param(2))*(obj.hauteur/2+obj.rayon_raccord_face);  
F=F-D_perp_int*-(abs(vect_param(2))-2);  
  
end  
  
F(3)=z;  
D=cross(D_int,Dz);  
D=D/norm(D);
```


D. Taillage numérique

Une alternative aux équations de conjugaison présentées au Chapitre 4 a dans quelques cas été utilisée pour déterminer si les calculs numériques étaient corrects. Cette méthode très peu rapide et très lourde et simpliste est une simulation de taillage.

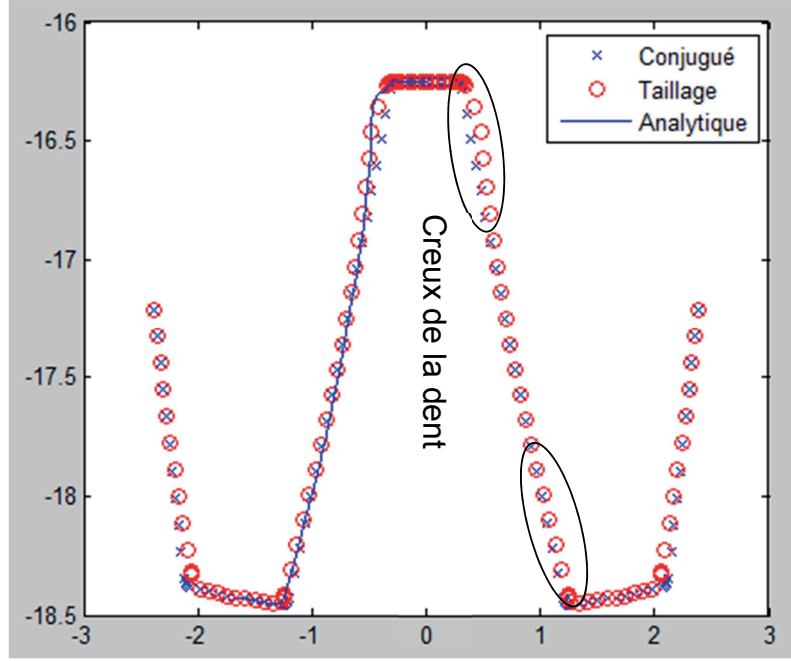


Figure D. 1 : Exemple de résultat pour la développante (taillage sans interférence nbre de dents=35 ; module =1)

Cette méthode a été utilisée pour évaluer la validité du calcul du conjugué cinématique. En réutilisant le résultat fourni par les premières versions du calcul décrit au Chapitre 4, on simule le passage de l'outil pour recréer le profil, et on corrige les points (i) issus du calcul dont la position est incompatible avec la position de l'outil numérique (physiquement : pénétration de l'outil dans le profil). La procédure de choix de correction se fait en résolvant l'Équation D. 1 pour λ , u et v . Cette équation calcule l'intersection entre la droite décrite par le point (i) et la normale du profil conjugué, et la surface de l'outil. On observe alors le signe du paramètre λ pour déterminer s'il y a pénétration de l'outil.

$$f(\lambda, u, v) = \mathbf{r}_{conj}^i + \lambda \mathbf{n}_{conj}^i - \mathbf{M}_{21}(\phi) \mathbf{r}_1(u, v) = 0 \quad \forall i, \phi$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lambda \geq 0 \rightarrow & \mathbf{r}_{taille}^i = \mathbf{r}_{conj}^i \\ \lambda < 0 \rightarrow & \mathbf{r}_{taille}^i = \mathbf{M}_{21}(\phi) \mathbf{r}_1(u, v) \end{cases}$$

Équation D. 1

Avec \mathbf{r}_{conj}^i la position du point i du résultat du calcul conjugué et \mathbf{r}_{taille}^i la position du point i comme sortie de la simulation du taillage. Un exemple de résultat obtenu pendant les développements du code, lorsque les résultats de la méthode de génération du conjugué par la théorie des enveloppes n'étaient pas encore satisfaisants, est fourni à la Figure D. 1.

E. Profil reconstruit par spline [55]

Le calcul numérique de profils par conjugaison cinématique ou en couple fournit des réponses point à point. Ces profils, pour être évalués, nécessitent d'être « reconstruits », c'est-à-dire qu'on doit pouvoir évaluer n'importe quel point du profil, même si celui-ci n'existe que sous la forme d'une suite de points. Pour cela, une *class* respectant les principes mis en place (voir §2.2 et §3.3) et permettant l'évaluation de profils décrits par points a été codée. Ce travail a fait l'objet d'un projet d'étudiant (cf. Genini [55]).

La solution retenue pour réaliser cette reconstruction fût de relier les différents points résultats du calcul par une (ou des) spline(s). Le nombre de types de splines existant étant important, M. M.Genini a évalué le comportement de trois types de splines présent dans le logiciel MATLAB, à savoir :

1. natural cubic
2. cubic not-a-knot
3. Hermite

Les différences entre ces types de splines se trouvent surtout dans la manière dont sont abordées les liaisons entre les différents points. L'évaluation du comportement des splines s'est faite en comparant deux profils reconstruits différents (développante 20° et NIHS 2002) avec leurs équivalents analytiques. La différence entre le profil reconstruit et le profil analytique a été mesurée en utilisant deux types de mesures différentes :

1. La moyenne de l'erreur quadratique
2. La moyenne de l'écart absolue

Ces mesures ont été évaluées sur 387 points, et on a évalué des reconstructions à partir de 4, 5, 6, 7 et 8 points de discrétisation. On présente à la Figure E. 1 un exemple de graphique obtenu pour un pignon de profil NIHS 2002 de 30 dents.

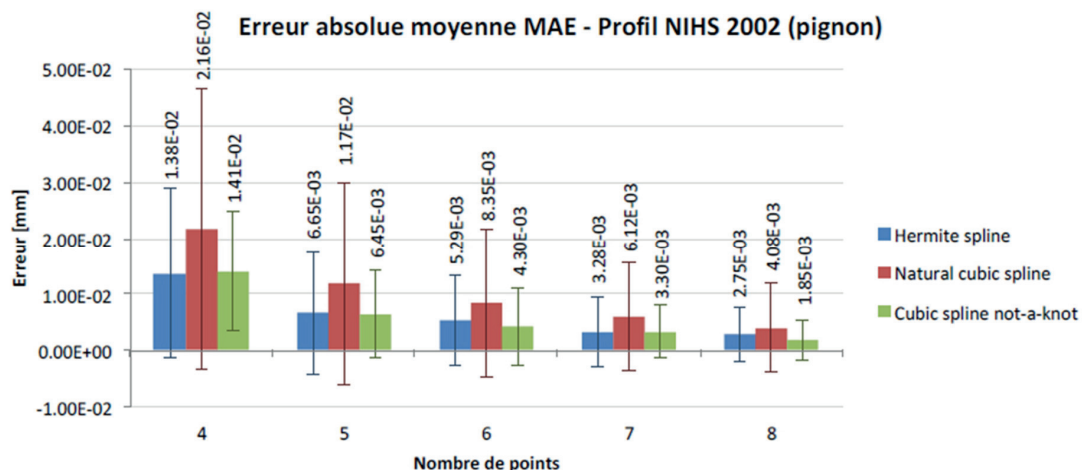


Figure E. 1 : Exemple de résultat d'évaluation des types de splines.

On peut voir que lorsqu'on augmente le nombre de points d'interpolation, l'erreur diminue, ce qui est attendu. On peut voir également, et ce résultat fût également observé pour les autres profils, que la spline de type *cubic not-a-knot* est celle qui permet, à nombre de points équivalents, d'obtenir le meilleur résultat.

Cette spline, de même que les autres évaluées est une fonction décrite par morceaux, comme représenté à l'Équation E. 1.

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ s_2(x) & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Équation E. 1

Chaque morceau $s_i(x)$ de l'Équation E. 1 est un polynôme d'ordre 3, comme présenté à l'Équation E. 2.

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Équation E. 2

La détermination des constantes se fait à l'aide des n points à interpoler. On a $4(n - 1)$ constantes, il nous faut donc autant de contraintes. L'évaluation des points à interpoler fournit n contraintes. La continuité des différents morceaux les uns avec les autres fournit $(n - 2)$ contraintes supplémentaires. On impose également la continuité de la première et la seconde dérivée fournissant $2(n - 2)$ contraintes supplémentaires, ce qui fait un total de $3(n - 2) + n = 4(n - 1) - 2$ contraintes (voir Équation E. 3).

$$\begin{aligned} y_i &= s_i(x_i) \\ s_{i-1}(x_i) &= s_i(x_i) \\ s'_{i-1}(x_i) &= s'_i(x_i) \\ s''_{i-1}(x_i) &= s''_i(x_i) \end{aligned}$$

Équation E. 3

Il manque donc deux contraintes supplémentaires. Jusque-là la spline *cubic not-a-knot* et la spline *natural cubic* ne présentent aucune différence, la différentiation intervient dans les deux conditions supplémentaires à imposer. La spline *cubic not-a-knot* propose des conditions supplémentaires sur la troisième dérivée, présentées à l'Équation E. 4.

$$\begin{aligned} s_1'''(x_2) &= s_2'''(x_2) \\ s_{n-1}'''(x_{n-1}) &= s_{n-2}'''(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Équation E. 4

Cette spline est ensuite intégrée a une *class* respectant les conditions décrites aux §2.2 et §3.3.

Curriculum Vitae

CONTACT INFORMATION

Quentin Theurillat-Bonjour
quentin.theurillat@alumni.epfl.ch

PERSONAL INFORMATION

Citoyen suisse
Marié
Originaire de St-Brais
Né le 16.11.1985 à Genève

EMPLOYMENT HISTORY

- Historique des postes :
 - 08.2007 : Stagiaire chez Rolex SA
 - 08.2008 : Stagiaire chez Rolex SA
 - 03-05.2009 : Ingénieur assistant au LCSM (EPFL)
- Positions académiques
 - 2009-2015 : Assistant-doctorant au LCSM
 - 2015-2016 : Assistant-doctorant au LAI
- Research and Training
 - 08-09.2012 : Stage au SRI, Menlo Park (CA), USA

EDUCATION

- 2001-2004 : Gymnase français de Bienne, section Math & Physique
- 2004-2009 : EPFL, section de Génie mécanique
- 2009-2016 : EPFL, programme doctoral en production et robotique

PROFESSIONAL QUALIFICATIONS

- Langues :
 - Français : langue maternelle (C2)
 - English : (B2)
 - Deutsch (B1)
- Computer Skills :
 - Microsoft Office
 - CATIA
 - MatLab
 - LaTeX

INTERESTS

- Randonnée, Trekking, ski de fond
- Musique classique, violon